**Scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 12 - 7 - 2017**

E. Scoppola

---

I Parte

---

**Esercizio 1**

Studiare la serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^b$$

al variare di $a$ e $b$ in $\mathbb{R}$ .

Se $a = 0$ abbiamo $S = 0$. Per $a \neq 0$ abbiamo

$$S = a^b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^b$$

cioè una serie armonica generalizzata che diverge per $b \leq 1$ e converge per $b > 1$.

**Esercizio 2**

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \log(1 + x) - \log(1 - x)$$

Calcoliamo le due serie di Taylor relative rispettivamente a $\log(1+x)$ e a $-\log(1-x)$ integrando rispettivamente le serie geometriche di ragione $-x$ e $x$. Otteniamo

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$-\log(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

da cui

$$f(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k + 1}$$

**Esercizio 3**

Sviluppare in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione periodica

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ 2x & \text{per } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Otteniamo

$$f(x) = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - 3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$$

infatti:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} xdx + \int_{0}^{\pi} 2xdx\Big) = \frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{\pi^2}{2} + 2\frac{\pi^2}{2}\Big) = \frac{1}{4}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} x\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} 2x\cos nxdx\Big)$$

Calcoliamo, integrando per parti, l'integrale

$$\int_a^b x\cos nxdx = x\frac{\sin nx}{n}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\sin nx}{n}dx = x\frac{\sin nx}{n}\Big|_a^b + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_a^b \tag{1}$$

Considerando che $\sin n\pi = 0$ per ogni $n$ e che $\cos n\pi = \cos(-n\pi) = (-1)^n$ otteniamo che $a_n = 0$ per $n$ pari mentre per $n$ dispari abbiamo

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}\Big(2-4\Big) = -\frac{2}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} x\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} 2x\sin nxdx\Big)$$

Calcoliamo, integrando per parti, l'integrale

$$\int_a^b x\sin nxdx = -x\frac{\cos nx}{n}\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\cos nx}{n}dx = -x\frac{\cos nx}{n}\Big|_a^b + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_a^b \tag{2}$$

e dunque

$$b_n = \frac{1}{\pi}\Big(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - 2x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\Big) = -3\frac{(-1)^n}{n}$$

---

II Parte

---

**Esercizio 1**

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y} \qquad \text{con} \qquad y(1) = 1$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 1/2$, passando alla variabile $z = y^{1-\alpha} = y^{1/2}$ otteniamo l'equazione per $z$

$$z' = \frac{2}{x}z + \frac{x}{2}$$

che risolviamo ottenendo

$$z(x) = x^2\big(C + \int \frac{1}{x^2}\frac{x}{2}\big) = x^2\big(C + \frac{1}{2}\log x\big)$$

da cui

$$y(x) = x^4\big(C + \frac{1}{2}\log x\big)^2$$

ed utilizzando il dato iniziale otteniamo $C = 1$.

**Esercizio 2**

Determinare la soluzione del problema:

$$y" + 4y = \cos x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

La soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_{omog} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Cerco una soluzione particolare della forma $A\cos x + B\sin x$ ottenendo

$$y_{part} = \frac{1}{3}\cos x$$

e dunque

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}\cos x$$

e che con i dati iniziali otteniamo

$$y = \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos x$$

**Esercizio 3**

Determinare la soluzione del problema:

$$2\partial_x f(x,y) - 4\partial_y f(x,y) = 0 \qquad \text{con} \qquad f(x,0) = x$$

Si tratta di un'equazione lineare omogenea del prim'ordine che possiamo risolvere passando alle variabili $u = \frac{x}{2} - \frac{y}{4}$ e $v = \frac{x}{2} + \frac{y}{4}$. In queste variabili l'equazione diventa

$$\partial_u f = 0$$

e dunque $f(x,y) = f(v(x,y)) = f(\frac{x}{2} + \frac{y}{4})$. Considerando la condizione al bordo otteniamo

$$f(x,y) = \frac{1}{2}y + x$$