Scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 12 - 7 - 2018

E. Scoppola

Esercizio 1

Studiare la serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^b$$

al variare di a e b in $\mathbb{R}$.

Se $a = 0$ abbiamo $S = 0$. Per $a \neq 0$ abbiamo

$$S = a^b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^b$$

cioè una serie armonica generalizzata che diverge per $b \leq 1$ e converge per $b > 1$.

Esercizio 2

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \log(1 + x) - \log(1 - x)$$

$$f(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k + 1}$$

Calcoliamo le due serie di Taylor relative rispettivamente a $\log(1+x)$ e a $-\log(1-x)$ integrando rispettivamente le serie geometriche di ragione $-x$ e x. Otteniamo

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$-\log(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

da cui

$$f(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k + 1}$$

Esercizio 3

Determinare la soluzione del problema:

$$y'' + 4y = \cos x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

La soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_{omog} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Cerco una soluzione particolare della forma $A \cos x + B \sin x$ ottenendo

$$y_{part} = \frac{1}{3} \cos x$$

e dunque

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x$$

e che con i dati iniziali otteniamo

$$y = \frac{2}{3} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos x$$

Esercizio 4

Determinare la soluzione del problema:

$$2\partial_x f(x,y) - 4\partial_y f(x,y) = 0 \qquad \text{con} \qquad f(x,0) = x$$

Si tratta di un'equazione lineare omogenea del prim'ordine che possiamo risolvere passando alle variabili $u = \frac{x}{2} - \frac{y}{4}$ e $v = \frac{x}{2} + \frac{y}{4}$. In queste variabili l'equazione diventa

$$\partial_u f = 0$$

e dunque $f(x,y) = f(v(x,y)) = f(\frac{x}{2} + \frac{y}{4})$. Considerando la condizione al bordo otteniamo

$$f(x,y) = \frac{1}{2} y + x$$