

Scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 13 - 9 - 2018

E. Scoppola

Esercizio 1

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}} = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n =$$
$$12 \left(\frac{1}{1 - 3/4} - 1 \right) = 36$$

Esercizio 2

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \frac{2x}{1-x}$$

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Esercizio 3

Determinare la soluzione del problema:

$$y' = x^2 y^2, \quad y(1) = 2$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili ed integrando otteniamo

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + c$$

e considerando il dato iniziale abbiamo $c = -\frac{5}{6}$ e dunque

$$y(x) = \frac{6}{5 - 2x^3}.$$

Esercizio 4

Determinare la soluzione del problema:

$$2\partial_x f(x, y) - 2\partial_y f(x, y) = 0 \quad \text{con} \quad f(x, 0) = x^2$$

Si tratta di un'equazione lineare omogenea del prim'ordine che possiamo risolvere passando alle variabili $u = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$ e $v = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$. In queste variabili l'equazione diventa

$$\partial_u f = 0$$

e dunque $f(x, y) = f(v(x, y)) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)$. Considerando la condizione al bordo otteniamo

$$f(x, y) = 4\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2$$