I Esonero di Metodi Matematici per l'Ottica del 14 - 11 - 2018
E. Scoppola

Esercizio 1

Calcolare le seguenti serie:

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{5^{n-1}}, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n+1}{n^2} - \frac{n+2}{n^2+2n+1} \Big)$$

$$S_1 = 10 \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{2}{5}\Big)^n + 5 \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{3}{5}\Big)^n = 10 \cdot \frac{5}{3} + 5 \cdot \frac{5}{2}$$

la serie S_2 è telescopica cioè possiamo scrivere il termine n-esimo $a_n = A_n - A_{n+1}$ con $A_n = \frac{n+1}{n^2}$. Sapendo che $A_n \to 0$ per $n \to \infty$ otteniamo

$$S_2 = A_1 = 2.$$

Esercizio 2

Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p} \qquad \text{al variare di } p \in \mathbb{R}$$

È una serie armonica generalizzata e quindi converge per $p > 1$ e diverge per $p \leq 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

Uso il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!} = 2\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \to \frac{2}{e} < 1$$

dunque la serie converge.

Esercizio 3

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = xe^{-x}$$

Abbiamo

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

e dunque

$$xe^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$$

Esercizio 4

Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi]$ con

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ 0 & \text{per } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Abbiamo

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sin nx$$

Infatti

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} xdx = -\frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2\pi} \cos kx \Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{k^2\pi} \Big[1-(-1)^k\Big]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x\sin(kx)dx = -\frac{1}{k\pi} x\cos kx \Big|_{-\pi}^{0} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$