Scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 16 - 7 - 2019

E. Scoppola

I Parte

Esercizio 1

Valutare la serie

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{3^{n-2}}$$

al variare di $a>0$ in $\mathbb{R}$.

$$S=9a\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{a}{3}$ che è convergente se $|a|<3$, ed in questo caso otteniamo

$$S=9a\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n-1-\frac{a}{3}\Big]=9a\Big[\frac{3}{3-a}-1-\frac{a}{3}\Big]=\frac{3a^3}{3-a}.$$

La serie invece è divergente se $a\geq 3$ ed indeterminata se $a\leq -3$.

Esercizio 2

Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica di periodo 2π definita in $[-\pi,\pi]$ con

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{per } x\in(-\pi,0)\\ 0 & \text{per } x\in[0,\pi]\end{cases}$$

Abbiamo

$$f(x)=-\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sin nx$$

Infatti

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xdx=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos(kx)dx=\frac{2}{k^2\pi}\cos kx\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{2}{k^2\pi}\Big[1-(-1)^k\Big]$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin(kx)dx=-\frac{2}{k\pi}x\cos kx\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{(-1)^{k+1}2}{k}.$$

II Parte

Esercizio 1

Determinare la soluzione del problema:

$$y" + 4y = \cos x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

La soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_{omog} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Cerco una soluzione particolare della forma $A \cos x + B \sin x$ ottenendo

$$y_{part} = \frac{1}{3} \cos x$$

e dunque

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x$$

e che con i dati iniziali otteniamo

$$y = \frac{2}{3} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos x$$

Esercizio 2

Determinare la soluzione del problema:

$$2\partial_x f(x, y) - 4\partial_y f(x, y) = 0 \qquad \text{con} \qquad f(x, 0) = x$$

Si tratta di un'equazione lineare omogenea del prim'ordine che possiamo risolvere passando alle variabili $u = \frac{x}{2} - \frac{y}{4}$ e $v = \frac{x}{2} + \frac{y}{4}$. In queste variabili l'equazione diventa

$$\partial_u f = 0$$

e dunque $f(x, y) = f(v(x, y)) = f(\frac{x}{2} + \frac{y}{4})$. Considerando la condizione al bordo otteniamo

$$f(x, y) = \frac{1}{2} y + x$$