Scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 17 - 9 - 2019
E. Scoppola

I Parte

Esercizio 1

Determinare il carattere della serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{n!}{n^n}.$$

Soluzione:
Si tratta di una serie a termini positivi, dal criterio del rapporto otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n = \frac{4}{3}e^{-1} < 1$$

dunque la serie converge.

Esercizio 2

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Soluzione:
Abbiamo

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... + (-1)^n x^{2n} + ...$$

e dunque

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}.$$

II Parte

Esercizio 1

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$y' = -y - xy^2$$

con $y(0) = 1$.

Soluzione:

Si tratta di un'equazione di Bernoulli che si risolve col cambiamento di variabile $z = y^{-1}$. Nella variabile z l'equazione diventa

$$z' = z + x$$

che ha soluzione

$$z = e^x C - x - 1.$$

Dal dato iniziale ricaviamo $C = 2$ e dunque

$$y(x) = (2e^x - x - 1)^{-1}.$$

Esercizio 2

Risolvere l'equazione alle derivate parziali:

$$\partial_x f(x, y) + (2e^x - y)\partial_y f(x, y) = 0 \qquad \text{con} \qquad f(0, y) = y$$

Soluzione:

Si tratta di un'equazione lineare a coefficienti non costanti. Dalla teoria generale studiamo il problema

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = 2e^x - y$$

e dunque l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = -y + 2e^x$$

e risolvendo

$$y = e^{-x}(C + e^{2x})$$

e dunque $C = e^x\big(y - e^x\big)$. La soluzione dell'equazione alle derivate parziali $f(x, y)$ cercata è dunque una funzione delle variabili x e y attraverso la funzione $g(x, y) = e^x\big(y - e^x\big)$ e dalla condizione al bordo otteniamo dunque:

$$f(x, y) = e^x\big(y - e^x\big) + 1.$$