Scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 19 - 2 - 2019

E. Scoppola

I Parte

Esercizio 1

Calcolare le seguenti serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4^{n+1}} = \frac{1}{8} \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^n = \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{1-1/2} - 1 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(\frac{4}{3}\big)^n \frac{1}{n!} - 1 = e^{4/3} - 1$$

Esercizio 2

Sviluppare in serie di Taylor intorno a $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

Abbiamo le serie di Taylor:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

e dunque

$$\sin x + \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Big[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big]$$

II Parte

Esercizio 3

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = y + \cos x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1$$

Si tratta di un'equazione lineare con $a(x) = 1$ e $b(x) = \cos x$. Dalla soluzione generale, integrando per parti, otteniamo subito la soluzione generale

$$y(x) = e^x \Big(C + e^{-x} \frac{\sin x - \cos x}{2} \Big)$$

ed utilizzando la condizione iniziale otteniamo la soluzione al problema di Cauchy:

$$y(x) = \frac{3}{2} e^x + \frac{\sin x - \cos x}{2}$$

Esercizio 4

Risolvere la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \qquad \text{con} \qquad f(x,0) = \cos(x)$$

Si tratta di un'equazione del prim'ordine lineare a coefficienti costanti. Col cambiamento di variabili

$$u = x - 2y, \qquad v = x + 2y$$

otteniamo l'equazione

$$\partial_u f(u,v) = 0$$

e dunque

$$f(x,y) = g(x + 2y)$$

Dalla condizione al bordo ricavo la forma della funzione $g(v)$ e dunque

$$f(x,y) = \cos(x + 2y)$$