Soluzione dello scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 20-9-17

E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

La funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua. Infatti usando la disuguaglianza

$$|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

otteniamo

$$\Big|\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

e dunque per ogni ϵ esite $\delta = \epsilon$ tale che

$$\Big|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big| \leq \epsilon$$

per ogni (x,y) tale che $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Esercizio 2

S_1 è una serie geometrica di ragione $\frac{2}{e} < 1$ e dunque

$$S_1 = 10 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 10 \frac{1}{1 - 2/e}$$

Per la serie S_2, ricordando che (vd pg. 346 del libro Marcellini Sbordone)

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

abbiamo

$$S_2 = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - (1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = e - 2,666...$$

Esercizio 3

Per lo sviluppo in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

vd il testo, formula (122.19) a pg. 348.

Parte II

Esercizio 1

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$y' = \frac{y}{x} + x^3, \qquad \text{con} \qquad y(1) = 0$$

Soluzione:

E' un'equazione lineare del prim' ordine con $a(x) = \frac{1}{x}$, con primitiva $A(x) = \log x$, e $b(x) = x^3$ e dunque applicando la formula per le soluzioni delle equazioni lineari otteniamo

$$y(x) = x\Big(C + \int \frac{1}{x} x^3\, dx\Big) = x(C + \frac{x^3}{3}).$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $0 = C + \frac{1}{3}$ e dunque $C = -\frac{1}{3}$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{x}{3}(-1 + x^3).$$

Esercizio 2

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$(1 + x^2)y\, y' = 2x, \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1$$

Soluzione:

Possiamo risolvere col metodo di separazione delle variabili ottenendo

$$y\, dy = \frac{2x}{1 + x^2} dx$$

e dunque

$$\frac{y^2}{2} = \log(1 + x^2) + C.$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $C = \frac{1}{2}$ e dunque la soluzione

$$y(x) = \sqrt{2 \log(1 + x^2) + 1}.$$

Esercizio 3

Determinare le soluzioni dell'equazione alle derivate parziali:

$$2\partial_{xx} f(x, y) + \partial_{yy} f(x, y) = 0$$

Soluzione:

Cerchiamo la soluzione per separazione di variabili cioè nella forma $f(x,y) = g(x)h(y)$. Otteniamo l'equazione

$$2g"(x)h(y) + h"(y)g(x) = 0$$

e dunque

$$2\frac{g"(x)}{g(x)} = K = -\frac{h"(y)}{h(y)}$$

per qualche costante K. Al variare del valore di K otteniamo diversi tipi di soluzione:

$K < 0$:

$$f(x,y) = \Big(A\cos(\sqrt{-K/2}x) + B\sin(\sqrt{-K/2}x)\Big)\Big(C_1 e^{\sqrt{-K}y} + C_2 e^{-\sqrt{-K}y}\Big)$$

$K = 0$:

$$f(x,y) = \Big(C_1 + C_2 x\Big)\Big(D_1 + D_2 y\Big) = A + Bx + Cy + Dxy$$

$K > 0$:

$$f(x,y) = \Big(C_1 e^{\sqrt{K/2x}} + C_1 e^{-\sqrt{K/2x}}\Big)\Big(A\cos(\sqrt{K}y) + B\sin(\sqrt{K}y)\Big).$$

Esercizio 6

Determinare la soluzione del problema:

$$x^2\partial_x f(x,y) + xy\partial_y f(x,y) = 0 \qquad \text{con} \qquad f(1,y) = \frac{3}{y^2}$$

Soluzione:

Abbiamo

$$a(x,y) = x^2 = \frac{dx}{dt}, \qquad b(x,y) = xy = \frac{dy}{dt}$$

da cui ricaviamo

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} \quad \text{equivalente a} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

da cui

$$\log x = \log y + C \quad \text{e dunque} \quad \frac{x}{y} = C.$$

La soluzione della equazione è dunque data da una qualunque funzione $g(\frac{x}{y})$. Considerando la condizione al bordo $f(1,y) = \frac{3}{y^2}$ otteniamo

$$f(x,y) = 3\Big(\frac{x}{y}\Big)^2$$