Scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 21 - 6 - 2017
E. Scoppola

I Parte

Esercizio 1

Determinare la derivata della funzione

$$f(x,y) = e^{2xy}(x+2y)$$

nella direzione del vettore $\mathbf{v} = (1,1)$.

Il versore nella direzione di $\mathbf{v}$ è dato da $\hat{\mathbf{v}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
Il gradiente di $f(x,y)$ è dato dal vettore

$$\nabla f(x,y) = \Big(e^{2xy}[2y(x+2y)+1], e^{2xy}[2x(x+2y)+2]\Big)$$

e dunque la derivata direzionale

$$f_{\hat{\mathbf{v}}}(x,y) = \Big(\nabla f(x,y), \hat{\mathbf{v}}\Big) = \frac{e^{2xy}}{\sqrt{2}}[(x+2y)(2x+2y)+3]$$

Esercizio 2

Determinare il valore della serie numerica:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(a-2)^n$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Si tratta di una serie geometrica di ragione $a-2$ che converge a $\frac{1}{3-a}$ se $|a-2| < 1$ cioè se $a \in (1,3)$, diverge se $a \geq 3$ ed è indeterminata se $a \leq 1$.

Esercizio 3

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

Conoscendo le serie di Taylor per le funzioni $\sin x$ e $\cos x$, sommandole otteniamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \Big[\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big]$$

II Parte

Esercizio 1

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$y' = -y(\frac{2}{x} + 3x^2 y) \qquad \text{con} \qquad y(1) = 1$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 2$, che possiamo risolvere con la sostituzione $z = y^{-1}$. Per la variabile z l'equazione diventa

$$z' = \frac{2}{x} z + 3x^2$$

con soluzione

$$z(x) = x^2 \Big(C + 3x\Big)$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $C = -2$ e dunque la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{3x^3 - 2x^2}.$$

Esercizio 2

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2y} \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili che si può scrivere

$$2y\,dy = \sin x\,dx$$

ed integrando

$$y^2 = -\cos x + C$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $C = 2$ e dunque

$$y(x) = \sqrt{2 - \cos x}.$$

Esercizio 3

Determinare la soluzione del problema:

$$y" - 2y' + y = 2\sin x + \cos x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Per trovare la soluzione dell'equazione omogenea risolviamo il polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

che ha discriminante nullo e dunque due soluzioni coincidenti $\lambda = 1$. Otteniamo dunque la soluzione $y_{omog} = e^x\big(C_1 + C_2 x\big)$.

Cerchiamo la soluzione particolare nella forma $y_{part} = A\cos x + B\sin x$ ottenendo

$$y'_{part} = -A\sin x + B\cos x, \qquad y"_{part} = -A\cos x - B\sin x$$

e dunque la seguente equazione per A e B:

$$-A\cos x - B\sin x - 2(-A\sin x + B\cos x) + A\cos x + B\sin x = 2\sin x + \cos x$$

da cui otteniamo

$$-A - 2B + A = 1, \qquad -B + 2A + B = 2$$

e dunque $B = -1/2, A = 1$ Quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = e^x\big(C_1 + C_2 x\big) + \cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

ed utilizzando i dati iniziali otteniamo $C_1 = 0, C_2 = 1/2$ da cui la soluzione

$$y(x) = \frac{e^x x}{2} + \cos x - \frac{1}{2}\sin x$$