

Scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 21 - 6 - 2018

E. Scoppola

Esercizio 1

Determinare il carattere della seguente serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}}.$$

Abbiamo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

Si tratta della serie armonica generalizzata che è convergente per $1+\alpha > 1$, dunque $\alpha > 0$, e divergente se $1+\alpha \leq 1$ dunque $\alpha \leq 0$.

Esercizio 2

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = xe^x$$

Per lo sviluppo della funzione esponenziale abbiamo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

da cui

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

Esercizio 3

Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2y}{x} - xy^2.$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 2$ e dunque passando alla variabile $z = y^{1-\alpha} = y^{-1}$ otteniamo l'equazione lineare

$$z' = -\frac{2}{x}z + x$$

che ha soluzioni

$$z(x) = \frac{1}{x^2} \left[cost + \int x^3 dx \right] = \frac{cost}{x^2} + \frac{x^2}{4}$$

e dunque

$$z(x) = \frac{C + x^4}{4x^2} \quad \text{da cui} \quad y(x) = z(x)^{-1} = \frac{4x^2}{C + x^4}$$

con C costante.