Simulazione del II Esonero di Metodi Matematici per l'Ottica del 22 - 1 - 2019

E. Scoppola

Esercizio 1

Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

i)

$$y' = x(2y + e^{x^2}) \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1$$

Si tratta di un'equazione lineare con $a(x) = 2x$ e $b(x) = xe^{x^2}$. Applicando la formula risolutiva otteniamo $A(x) = x^2$ e dunque

$$y(x) = e^{x^2}\Big[\int e^{-x^2} x e^{x^2}\, dx\Big] = e^{x^2}\Big[C + \frac{x^2}{2}\Big]$$

ed utilizzando il dato iniziale

$$y(x) = e^{x^2}\Big[1 + \frac{x^2}{2}\Big]$$

ii)

$$y' = 2y - xy^2 \qquad \text{con} \qquad y(0) = 4/3$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 2$. Passando alla variabile $z = y^{1-\alpha} = y^{-1}$ otteniamo l'equazione

$$z' = -\big(2z - x\big)$$

da cui

$$z = e^{-2x}\Big[\int e^{2x} x\, dx\Big] = e^{-2x}\Big[C + \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\Big] = Ce^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Utilizzando la condizione iniziale otteniamo

$$z = e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

da cui

$$y = \frac{4}{4e^{-2x} + 2x - 1}.$$

iii)

$$y' = xy^3 \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili, infatti separando otteniamo

$$\frac{dy}{y^3} = x\, dx$$

da cui

$$y^{-2} = -x^2 + C$$

ed utilizzando il dato iniziale

$$y = \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}.$$

iv)
$$y" - y = \sin(2x) + x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Si tratta di un'equazione del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico è: $\lambda^2 - 1 = 0$ da cui $\lambda = \pm 1$ e dunque l'equazione omogenea ha soluzioni $y_{om} = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Utilizzando il principio di sovrapposizione cerchiamo la soluzione particolare come somma di due soluzioni particolari $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ con y_{p1} soluzione di

$$y" - y = \sin(2x)$$

e y_{p2} soluzione di

$$y" - y = x$$

che cerchiamo nella forma

$$y_{p1} = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

$$y_{p2} = Cx + D.$$

Dalle equazioni otteniamo $A = 0$, $B = -1/5$ e $C = -1$, $D = 0$. Dunque la soluzione complessiva

$$y(x) = y_{om}(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{5}\sin(2x) - x$$

Utilizzando i dati iniziali otteniamo

$$y(0) = 0 = c_1 + c_2$$

$$y'(0) = 0 = c_1 - c_2 - \frac{2}{5} - 1$$

e dunque $c_1 = \frac{7}{10}$ e $c_2 = -\frac{7}{10}$, da cui

$$y(x) = \frac{7}{10}e^x - \frac{7}{10}e^{-x} - \frac{1}{5}\sin(2x) - x$$

Esercizio 2

Risolvere le seguenti equazioni alle derivate parziali:

i)
$$-3\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) + 2\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 0 \qquad \text{con} \qquad f(x,0) = e^{x^2}$$

Si tratta di un'equazione del prim'ordine lineare a coefficienti costanti. Col cambiamento di variabili

$$u = -\frac{x}{3} + \frac{y}{2}, \qquad v = -\frac{x}{3} - \frac{y}{2}$$

otteniamo l'equazione

$$\partial_u f(u,v) = 0$$

e dunque

$$f(x,y) = g(\frac{x}{3} + \frac{y}{2})$$

Dalla condizione al bordo ricavo la forma della funzione $g(v)$ e dunque

$$f(x,y) = \exp\left\{9(\frac{x}{3} + \frac{y}{2})^2\right\}$$

ii)
$$2x\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0 \qquad \text{con} \qquad f(1,y))=e^y$$

Si tratta di un'equazione del prim'ordine lineare a coefficienti variabili. Imponiamo
$$a(x,y)=2x=\frac{dx}{dt}, \quad b(x,y)=-1=\frac{dy}{dt}$$
da cui l'equazione
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2x}$$
Integrando otteniamo
$$y+\frac{1}{2}\log x=C$$
e dunque
$$f(x,y)=h(y+\frac{1}{2}\log x)$$
e dalla condizione al bordo otteniamo
$$f(x,y)=x^{1/2}e^y.$$