
I Parte

Esercizio 1

Determinare il carattere della serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}$$

al variare di $a \geq 0$. La serie è a termini positivi e per discuterne la convergenza possiamo usare il criterio del rapporto. Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{a^n} = a$$

da cui concludiamo:

- la serie diverge per $a > 1$
- la serie converge per $a < 1$
- la serie converge anche per $a = 1$ perché in questo caso è una serie armonica generalizzata con esponente $2 > 1$.

Esercizio 2

Calcolare la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}}$$

Si tratta di una serie geometrica che può essere calcolata esplicitamente ottenendo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}} = 18 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 - \frac{2}{3} \right] = 18 \left[3 - \frac{5}{3} \right] = 24$$

Esercizio 3

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = x^2 \cos x$$

Lo sviluppo della funzione coseno attorno a $x = 0$ è dato da

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

da cui

$$f(x) = x^2 \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n)!}$$

II Parte

Esercizio 1

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy per $x \geq 1$:

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)y \quad \text{con} \quad y(1) = 1$$

L'equazione si può risolvere per separazione di variabili o applicando la formula per la soluzione delle equazioni lineari. Poiché la primitiva di $a(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ è $A(x) = x + \log x$ si ottiene

$$y(x) = Cxe^x$$

e dai dati iniziali otteniamo

$$y(x) = xe^{x-1}.$$

Esercizio 2

Determinare la soluzione del problema:

$$y'' + 2y' + y = e^{3x} \quad \text{con} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea.

La soluzione dell'omogenea associata si determina dal polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

ottenendo

$$y_{om}(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

La soluzione particolare la cerchiamo nella forma $y_{part}(x) = Ce^{3x}$ ottenendo

$$y_{part}(x) = \frac{1}{16}e^{3x}.$$

Abbiamo dunque la soluzione generale

$$y(x) = y_{om}(x) + y_{part}(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + \frac{1}{16}e^{3x}$$

e dai dati iniziali otteniamo la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{16} \left(-e^{-x} + 12xe^{-x} + e^{3x} \right).$$

Esercizio 3

Determinare la soluzione del problema:

$$\partial_x f(x, y) - 2\partial_y f(x, y) = 0 \quad \text{con} \quad f(x, 0) = 2x$$

Con il cambio di variabili $u = x - \frac{y}{2}$, $v = x + \frac{y}{2}$ l'equazione diventa

$$\partial_u f(u, v) = 0$$

da cui f dipende solo dalla variabile v e dunque $f(x, y) = g(x + \frac{y}{2})$ e dalla condizione al bordo otteniamo

$$f(x, y) = y + 2x$$