Scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 28 - 1 - 2019

E. Scoppola

I Parte

Esercizio 1

Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^p + 1} \qquad \text{al variare di } p \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n!}$$

La prima serie può essere stimata dall' alto e dal basso con serie armoniche generalizzate:

se $p \leq 1$ abbiamo infatti

$$\frac{3}{n^p + 1} \geq \frac{3}{2n^p}$$

che diverge;

se $p > 1$ abbiamo

$$\frac{3}{n^p + 1} \leq \frac{3}{n^p}$$

che converge.

La seconda serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n!}$$

converge e si può calcolare esattamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n!} = \exp\{\frac{3}{2}\} - 1$$

Esercizio 2

Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica in $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ -x & \text{per } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Si tratta di una funzione pari. Abbiamo:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = -\frac{2}{k^2 \pi} \cos kx \Big|_0^{\pi}$$

dunque a_k nullo per k pari mentre sui k dispari vale

$$a_k = \frac{4}{k^2}.$$

Per simmetria

$$b_k = 0 \qquad \text{per ogni } k$$

e dunque otteniamo

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

Scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 28 - 1 - 2019

E. Scoppola

II Parte

Esercizio 3

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = xy - xy^3 \qquad \text{con} \qquad y(0) = 2$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 3$. Passando alla variabile $z = y^{1-\alpha} = y^{-2}$ otteniamo l'equazione

$$z' = -2\big(xz - x\big)$$

da cui

$$z = e^{-x^2}\left[C + 2\int e^{x^2} x\, dx\right] = e^{-x^2}\left[C + e^{x^2}\right] = Ce^{-x^2} + 1$$

Utilizzando la condizione iniziale otteniamo $z(0) = 1/4$ da cui $C = -3/4$ e dunque

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-x^2}}}.$$

Esercizio 4

Risolvere la seguente equazione alle derivate parziali:

$$4\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + 3\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \qquad \text{con} \qquad f(0,y) = y^2$$

Si tratta di un'equazione del prim'ordine lineare a coefficienti costanti. Col cambiamento di variabili

$$u = \frac{x}{4} + \frac{y}{3}, \qquad v = \frac{x}{4} - \frac{y}{3}$$

otteniamo l'equazione

$$\partial_u f(u, v) = 0$$

e dunque

$$f(x, y) = g(\frac{x}{4} - \frac{y}{3})$$

Dalla condizione al bordo ricavo la forma della funzione $g(v)$ e dunque

$$f(x, y) = 9\big(\frac{x}{4} - \frac{y}{3}\big)^2.$$