Esercizio 1

Calcolare le seguenti serie:

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} + 1}{3^n}, \quad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} \right)$$

$$S_1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 6 + \frac{3}{2}$$

La serie S_2 è una serie telescopica, $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n = A_{n+1} - A_n$ con $A_n = \frac{1}{2(n+1)}$ e dunque la sua somma parziale k-esima

$$\left(S_2 \right)_k = \sum_{n=0}^k \left(\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} \right) = A_{k+1} - A_0$$

da cui essendo $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$ e $A_0 = \frac{1}{2}$ otteniamo

$$S_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(S_2 \right)_k = -A_0 = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 2

Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 3/2)^p} \quad \text{al variare di } p \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$$

La prima serie diverge per $p \leq 1$ e converge per $p > 1$.

Infatti

$$\frac{1}{(n + 3/2)^p} > \frac{1}{(n + 2)^p}$$

e dunque la serie è stimata dal basso da una serie armonica generalizzata che diverge per $p \leq 1$. D'altra parte

$$\frac{1}{(n + 3/2)^p} < \frac{1}{n^p}$$

e dunque la serie è stimata dall'alto da una serie armonica generalizzata che converge per $p > 1$.

Per quanto riguarda la seconda serie, essa converge. Si può infatti applicare il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} 3^n n!}{3^{n+1} (n+1)! n^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \rightarrow \frac{e}{3} < 1.$$

Esercizio 3

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 1$ la funzione

$$f(x) = (x - 1) \log x$$

Ricordando lo sviluppo in serie di Taylor intorno a $y_0 = 0$ della funzione $\log(1+y)$

$$\log(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{y^n}{n}$$

e scrivendo $\log x = \log(1 + x - 1)$ otteniamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{n}$$

Esercizio 4

Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica in $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ 1 & \text{per } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Poiché la funzione $f(x)$ è simmetrica, abbiamo che i coefficienti di Fourier b_k sono tutti nulli. Calcoliamo:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(kx) dx = \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

e dunque $a_k = 0$ per k pari e $a_{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)\pi} (-1)^n$ da cui

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} (-1)^n \cos(2n+1)x.$$