

Simulazione del II Esonero di Metodi Matematici per l'Ottica del 9-6-17

E. Scoppola

Esercizio 1

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$y' = \frac{2y}{x} + x^3, \quad \text{con} \quad y(1) = 0$$

Soluzione:

E' un'equazione lineare del prim' ordine con $a(x) = \frac{2}{x}$, con primitiva $A(x) = 2 \log x$, e $b(x) = x^3$ e dunque applicando la formula per le soluzioni delle equazioni lineari otteniamo

$$y(x) = x^2 \left(C + \int \frac{1}{x^2} x^3 dx \right) = x^2 \left(C + \frac{x^2}{2} \right).$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $0 = C + \frac{1}{2}$ e dunque $C = -\frac{1}{2}$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{x^2}{2} (1 + x^2).$$

Esercizio 2

Integrare la seguente equazione:

$$y^2 dx - (2xy + 3) dy = 0$$

Soluzione:

Conviene risolvere l'equazione determinando $x(y)$. Abbiamo

$$x'(y) = \frac{2}{y}x + \frac{3}{y^2}$$

e dunque un'equazione lineare con $a(y) = \frac{2}{y}$ con primitiva $A(y) = 2 \log y$ e $b(y) = \frac{3}{y^2}$. Otteniamo dunque dalla formula generale

$$x(y) = y^2 \left(C + \int \frac{1}{y^2} \frac{3}{y^2} dy \right) = Cy^2 - \frac{1}{y}.$$

Esercizio 3

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$(1 + e^x) y y' = e^x, \quad \text{con} \quad y(0) = 1$$

Soluzione:

Possiamo risolvere col metodo di separazione delle variabili ottenendo

$$y dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

e dunque

$$\frac{y^2}{2} = \log(1 + e^x) + C.$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $C = \frac{1}{2} - \log 2$ e dunque la soluzione

$$y(x) = \sqrt{2 \log \frac{1 + e^x}{2} + 1}.$$

Esercizio 4

Determinare la soluzione del problema:

$$y'' - 2y' + y = e^{2x} + \cos x \quad \text{con} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Soluzione:

Ci calcoliamo separatamente la soluzione y_{omog} dell'equazione omogenea associata:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

e le soluzioni particolari $y_{part.1}$ e $y_{part.2}$ soluzioni rispettivamente delle equazioni

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}, \quad y'' - 2y' + y = \cos x.$$

Per l'omogenea abbiamo il polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

con discriminante $\Delta = 0$ e soluzioni $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Otteniamo dunque

$$y_{omog} = C_1 e^x + C_2 x e^x. \quad (1)$$

Poniamo $y_{part.1} = A e^{2x}$. Otteniamo l'equazione per A :

$$4A - 4A + A = 1$$

da cui otteniamo

$$y_{part.1}(x) = e^{2x}. \quad (2)$$

Ponendo poi $y_{part.2} = A \cos x + B \sin x$ abbiamo l'equazione

$$-A \cos x - B \sin x + 2A \sin x - 2B \cos x + A \cos x + B \sin x = \cos x$$

da cui otteniamo $A = 0$ e $B = -\frac{1}{2}$ e dunque

$$y_{part.2}(x) = -\frac{1}{2} \sin x. \quad (3)$$

Dalle equazioni (1), (2) e (3) e dal principio di sovrapposizione otteniamo la soluzione

$$y(x) = y_{omog}(x) + y_{part.1}(x) + y_{part.2}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x} - \frac{1}{2} \sin x$$

Utilizzando i dati iniziali otteniamo: $y(0) = 0 = C_1 + 1$ da cui $C_1 = -1$ e $y'(0) = 1 = C_1 + C_2 + 2 - \frac{1}{2}$ da cui $C_2 = \frac{1}{2}$ e dunque la soluzione

$$y(x) = -e^x + \frac{1}{2} x e^x + e^{2x} - \frac{1}{2} \sin x$$

Esercizio 5

Determinare le soluzioni dell'equazione alle derivate parziali:

$$2\partial_{xx}f(x, y) + \partial_{yy}f(x, y) = 0$$

Soluzione:

Cerchiamo la soluzione per separazione di variabili cioè nella forma $f(x, y) = g(x)h(y)$. Otteniamo l'equazione

$$2g''(x)h(y) + h''(y)g(x) = 0$$

e dunque

$$2\frac{g''(x)}{g(x)} = K = -\frac{h''(y)}{h(y)}$$

per qualche costante K . Al variare del valore di K otteniamo diversi tipi di soluzione:

$K < 0$:

$$f(x, y) = \left(A \cos(\sqrt{-K/2}x) + B \sin(\sqrt{-K/2}x) \right) \left(C_1 e^{\sqrt{-K}y} + C_2 e^{-\sqrt{-K}y} \right)$$

$K = 0$:

$$f(x, y) = \left(C_1 + C_2 x \right) \left(D_1 + D_2 y \right) = A + Bx + Cy + Dxy$$

$K > 0$:

$$f(x, y) = \left(C_1 e^{\sqrt{K/2}x} + C_2 e^{-\sqrt{K/2}x} \right) \left(A \cos(\sqrt{K}y) + B \sin(\sqrt{K}y) \right).$$

Esercizio 6

Determinare la soluzione del problema:

$$x^2 \partial_x f(x, y) + xy \partial_y f(x, y) = 0 \quad \text{con} \quad f(1, y) = \frac{3}{y^2}$$

Soluzione:

Abbiamo

$$a(x, y) = x^2 = \frac{dx}{dt}, \quad b(x, y) = xy = \frac{dy}{dt}$$

da cui ricaviamo

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} \quad \text{equivalente a} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

da cui

$$\log x = \log y + C \quad \text{e dunque} \quad \frac{x}{y} = C.$$

La soluzione della equazione è dunque data da una qualunque funzione $g(\frac{x}{y})$. Considerando la condizione al bordo $f(1, y) = \frac{3}{y^2}$ otteniamo

$$f(x, y) = 3\left(\frac{x}{y}\right)^2$$