**Esercitazione di Metodi Matematici per l'Ottica del 26 - 4 - 2017**
E. Scoppola

### Esercizio 1

Determinare gli insiemi di definizione delle funzioni:

$$f(x) = \sqrt{1-x-y}\Big(1-y^2\Big)^{1/4} + \log(\log x - y), \qquad g(x) = \frac{\log(e^x-1)}{\sqrt{x-y}\sqrt{y-2}}$$

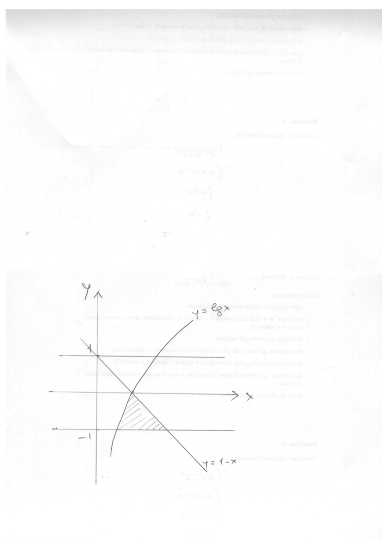
Per $f(x)$ abbiamo le condizioni:

$$1-x-y \geq 0, \quad 1-y^2 \geq 0, \quad x > 0, \quad \log x - y > 0$$

corrispondenti a

$$y \leq 1-x, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad x > 0, \quad y < \log x$$

e dunque alla regione



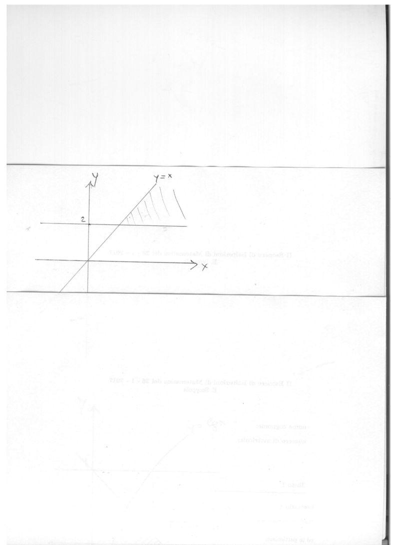

Per $g(x)$ abbiamo le condizioni:

$$x-y > 0, \quad y-2 > 0, \quad e^x - 1 > 0$$

corrispondenti a

$$y < x, \quad y > 2, \quad x > 0$$

e dunque alla regione



**Esercizio 2**

Studiare la continuità delle seguenti funzioni nell'origine:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^6+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione $f(x,y)$ è continua poiché usando la disuguaglianza

$$\left|xy\right| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

otteniamo

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

e dunque per ogni $\epsilon$ esite $\delta = 2\epsilon$ tale che

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \epsilon$$

per ogni $(x,y)$ tale che $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

La funzione $g(x,y)$ non è continua infatti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^6+y^2}$$

non esiste visto che vale 0 se $(x,y) \to (0,0)$ lungo l'asse $y$ e vale 1 se $(x,y) \to (0,0)$ lungo l'asse $x$.

**Esercizio 3**

Determinare il gradiente e la derivata direzionale delle seguenti funzioni nelle direzioni indicate

$$f(x,y) = xe^{xy} + y^7, \quad \mathbf{v} = (-1,-1), \quad P = (0,1)$$
$$g(x,y) = (x+y)^2, \quad \mathbf{v} = (0,-1), \quad P = (2,1)$$

Abbiamo

$$\nabla f(x,y) = \Big(e^{xy}(1+xy), x^2 e^{xy} + 7y^6\Big)$$

che calcoliamo in $P$:

$$\nabla f(0,1) = (1,7)$$

Normalizzando il vettore $\mathbf{v}$ otteniamo $\hat{\mathbf{v}} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e dunque

$$f_{\hat{\mathbf{v}}}(0,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7}{\sqrt{2}} = -4\sqrt{2}$$

$$\nabla g(x,y) = \Big(2(x+y), 2(x+y)\Big)$$
$$\nabla g(2,1) = (6,6)$$

e dunque

$$g_{\mathbf{v}}(2,1) = -6$$

**Esercizio 4**

Determinare modulo e argomento dei numeri complessi

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \qquad z_2 = 3i - \sqrt{3}$$

Abbiamo

$$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2, \quad 2\cos\theta_1 = 1, \quad 2\sin\theta_1 = \sqrt{3}$$

da cui $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ e dunque

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$|z_2| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}, \quad 2\sqrt{3}\cos\theta_2 = -\sqrt{3}, \quad 2\sqrt{3}\sin\theta_2 = 3$$

da cui $\theta_2 = \frac{2}{3}\pi$ e dunque

$$z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

**Esercizio 5**

Studiare il carattere delle serie numeriche:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}, \qquad a \geq 0$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 10n}{n^4 + 1}$$

$S_1$ è una serie a termini non negativi che per il criterio del rapporto converge per $a \in [0, 1)$ e diverge per $a > 1$. Infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{a^n} = a \frac{n^2}{(n+1)^2} \to a$$

Per $a = 1$ la serie è una serie armonica generalizzata convergente.

La serie $S_2$ ha termini positivi per $n$ abbastanza grandi ($n > 10$) e per il criterio del confronto è convergente infatti

$$\frac{n^2 - 10n}{n^4 + 1} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$$

che è convergente (armonica generalizzata).

**Esercizio 6**

Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 3^n}{4^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3}{4^n}$$

Abbiamo in entrambi i casi la somma di due serie geometriche:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 3^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} =$$

$$\frac{1}{1 - 1/4} + \frac{1}{1 - 3/4} = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4^n} = 2 + 3\frac{4}{3} = 6$$

**Esercizio 7**

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad g(x) = \log(1+x), \qquad h(x) = \frac{1}{x-a}, \quad a \neq 0$$

Per sviluppare $f(x)$ possiamo usare la serie geometrica di ragione $-x$ ottenendo

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

e per la funzione $g(x)$ possiamo ricordare che integrando lo sviluppo precedente otteniamo

$$g(x) = \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Per la funzione $h(x)$ utilizziamo sempre la serie geometrica osservando che

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} \; \frac{1}{1 - x/a}$$

e otteniamo

$$\frac{1}{x-a} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

**Esercizio 8**

Sviluppare in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ le funzioni

$$\cosh ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}, \qquad \sinh ax = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

La funzione $\cosh ax$ è una funzione pari dunque gli unici coefficienti di Fourier diversi da zero sono le $a_k$. Abbiamo

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} dx = \frac{1}{2a\pi}\Big[\Big(e^{a\pi} - 1\Big) - \Big(e^{-a\pi} - 1\Big)\Big] =$$

$$\frac{1}{2a\pi}\Big(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\Big) = \frac{1}{a\pi}\sinh(a\pi)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(e^{ax} + e^{-ax}\Big)\cos kx dx$$

Calcoliamo integrando due volte per parti gli integrali $\int_0^{\pi} e^{ax}\cos kx dx$ e $\int_0^{\pi} e^{-ax}\cos kx dx$, otteniamo:

$$\int_0^{\pi} e^{ax}\cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx e^{ax}\Big|_0^{\pi} - \frac{a}{k}\int_0^{\pi} e^{ax}\sin kx dx = \frac{a}{k^2}\cos kx e^{ax}\Big|_0^{\pi} - \frac{a^2}{k^2}\int_0^{\pi} e^{ax}\cos kx dx$$

da cui

$$\int_0^{\pi} e^{ax}\cos kx dx = \frac{a}{k^2 + a^2}\Big[(-1)^k e^{a\pi} - 1\Big]$$

e analogamente

$$\int_0^{\pi} e^{-ax}\cos kx dx = -\frac{a}{k^2 + a^2}\Big[(-1)^k e^{-a\pi} - 1\Big]$$

e dunque

$$a_k = \frac{1}{\pi} 2a \sinh a\pi \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2}$$

da cui

$$\cosh ax = \frac{2\sinh(a\pi)}{\pi}\Big[\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} a\frac{(-1)^k}{k^2 + a^2}\cos kx\Big]$$

Analogamente per la funzione $\sinh ax$ che è una funzione dispari abbiamo che gli unici coefficienti di Fourier diversi da zero sono le $b_k$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(e^{ax} - e^{-ax}\Big)\sin kx dx$$

Di nuovo integrando due volte per parti otteniamo

$$\int_0^{\pi} e^{ax}\sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx e^{ax}\Big|_0^{\pi} + \frac{a}{k}\int_0^{\pi} e^{ax}\cos kx dx = -\frac{1}{k}\Big((-1)^k e^{a\pi} - 1\Big) - \frac{a^2}{k^2}\int_0^{\pi} e^{ax}\sin kx dx$$

da cui

$$\int_0^{\pi} e^{ax}\sin kx dx = \frac{k^2}{k^2 + a^2}\Big[1 - \frac{(-1)^k}{k}e^{a\pi}\Big]$$

e analogamente

$$\int_0^{\pi} e^{-ax} \sin kx dx = \frac{k^2}{k^2+a^2}\left[1 - \frac{(-1)^k}{k} e^{-a\pi}\right]$$

Otteniamo in conclusione

$$b_k = -\frac{1}{\pi}\frac{k}{k^2+a^2}(-1)^k\left[e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right]$$

e dunque

$$\sinh ax = -\frac{2\sinh a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+a^2}(-1)^k \sin kx$$