

**Università degli studi di Roma Tre - Facoltà di Ingegneria  
Laurea Magistrale in Ingegneria Elettronica**

***APPUNTI SULLE TRASFORMATE  
PER L'ELABORAZIONE DEI  
SEGNALI DIGITALI***

**B. Palumbo  
A.A. 2010-11**

~~~~~

**INTRODUZIONE**

Questi appunti sono stati scritti per fornire un supporto agli studenti del corso di "Elaborazione informativa del segnale", nell'ambito della Laurea Magistrale in Ingegneria Elettronica presso l'Università Roma Tre. Il corso si prefigge l'obiettivo di dare gli strumenti matematici necessari per l'elaborazione dei segnali; è quindi un corso essenzialmente di Matematica, seppure sempre con un occhio rivolto alle applicazioni.

La maggior parte degli argomenti qui trattati possono essere trovati nel libro "Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing", di N. Ahmed e K.R. Rao (Springer-Verlag, 1975); in molti casi sono state usate notazioni del tutto simili a quelle usate nel testo citato, in altri casi il testo originale è stato modificato ed arricchito con esempi ed osservazioni.

All'occorrenza, si è accennato all'uso del noto software *Mathematica* per l'esecuzione effettiva di calcoli più o meno complessi; volendo, il lettore esperto può utilizzare *Mathematica* non solo per tracciare i grafici di funzioni, ma anche per implementare gli algoritmi che saranno descritti in seguito.

Nell'ultima parte di questi appunti sono stati riportati alcuni risultati contenuti in tesine svolte da studenti di anni precedenti, che hanno approfondito autonomamente alcuni argomenti, soprattutto inerenti le applicazioni concrete degli strumenti qui presentati. Colgo l'occasione per ringraziare questi studenti per il lavoro svolto, che torna utile ai loro colleghi più giovani.

# PRIMA PARTE

## RICHIAMI

In questa prima parte vengono riassunti alcuni noti risultati riguardanti concetti probabilmente già noti al lettore da altri corsi, soprattutto in relazione all'elaborazione dei segnali "nel continuo", cioè intesi come funzioni del tempo.

### 1. RICHIAMI SUI NUMERI COMPLESSI

Richiamiamo qui brevemente alcuni concetti relativi al campo  $\mathbb{C}$  dei numeri complessi, di cui faremo largo uso nel seguito.

Scritto il numero complesso  $z$  nella forma  $z = x + iy$ , il **modulo** di  $z$  è definito dalla formula

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (1.1)$$

geometricamente, tale numero indica la distanza dall'origine del punto  $P = (x; y)$  che rappresenta nel piano di Gauss il numero complesso  $z$ . Nell'ipotesi  $z \neq 0$ , posto  $\rho = |z|$ , si definisce **argomento** del numero complesso  $z$  ogni angolo  $\varphi$  soluzione del sistema

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi; \end{cases} \quad (1.2)$$

si ottiene così geometricamente l'angolo descritto dal raggio vettore relativo al punto  $P$  rispetto al semiasse reale positivo. Questo sistema ammette sempre infinite soluzioni, una per ciascun intervallo di ampiezza  $2\pi$ ; in particolare, si indica convenzionalmente con il termine **argomento principale** di  $z$  l'unico angolo  $\varphi$  che soddisfa il sistema (1.2) e che cade nell'intervallo  $(-\pi, \pi]$ ; tale angolo si indica di solito con  $\arg(z)$ , mentre si usa il simbolo  $\text{Arg}(z)$  per indicare l'insieme di *tutte* le possibili determinazioni dell'argomento (perciò è  $\text{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi$ ). Ad esempio, il numero  $z = 1 + i$  ha modulo  $\sqrt{2}$  ed argomento principale  $\frac{\pi}{4}$ , il numero  $z = -8 + 15i$  ha modulo 17 ed

argomento principale  $\arccos\left(-\frac{8}{17}\right)$ , il numero  $z = 3 - 7i$  ha modulo  $\sqrt{58}$  ed argomento principale

$\arcsin\left(-\frac{7}{\sqrt{58}}\right) = -\arcsin\frac{7}{\sqrt{58}}$ , infine il numero  $z = -4 - 3i$  ha modulo 5 ed argomento principale

$\arcsin\frac{3}{5} - \pi$ . In ciascuno di questi casi, si ottengono tutte le possibili determinazioni dell'argomento sommando all'argomento principale l'angolo  $2k\pi$  (con  $k$  intero) <sup>(1)</sup>.

---

<sup>1</sup> Il lettore che avesse difficoltà nel corretto uso delle funzioni goniometriche inverse è invitato a consultare un testo che tratti l'argomento. Ad esempio, è possibile utilizzare la breve dispensa "*Funzioni goniometriche inverse*", disponibile alla pagina Internet [http://host.uniroma3.it/facolta/ingegneria/files/funzioni\\_goniometriche\\_inverse.pdf](http://host.uniroma3.it/facolta/ingegneria/files/funzioni_goniometriche_inverse.pdf)

Ora, poiché dividendo termine a termine le due equazioni del sistema (1.2) si ottiene  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi$ ,

alcuni autori danno per l'argomento la formula esplicita  $\arg(z) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ; occorre però osservare che tale formula è in generale errata, non solo perché non ha senso per  $x = 0$  (per quanto tale difficoltà sarebbe anche superabile), ma soprattutto perché non sempre fornisce l'argomento richiesto. Ad esempio, se  $z = 7 + 24i$  si ha  $|z| = 25$ , ed inoltre  $\varphi$  deve soddisfare le due equazioni  $25 \cos \varphi = 7$  e  $25 \sin \varphi = 24$ . Essendo  $\varphi$  nel primo quadrante, si può scrivere indifferentemente  $\varphi = \arccos \frac{7}{25}$  oppure  $\varphi = \arcsen \frac{24}{25}$ , oppure ancora  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{24}{7}$ ; perciò in questo caso la formula è esatta, e lo stesso accade per un numero con parte reale positiva e coefficiente dell'immaginario negativo, come si verifica facilmente. Se però consideriamo il numero  $z = -\sqrt{3} + i$  abbiamo, per quanto detto sopra,  $\rho = 2$  e  $\varphi = \frac{5}{6}\pi$ , mentre la formula suddetta darebbe  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$ . Il problema è che l'argomento principale può variare in  $(-\pi, \pi]$ , mentre i valori della funzione arcotangente giacciono sempre tra  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$ . Dunque una formula che esprima in modo esatto  $\arg(z)$  in termini di arcotangente dovrebbe distinguere i vari casi. Si può scrivere cioè:

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{per } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{per } x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{per } x = 0 \wedge y < 0 \quad (2) \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{per } x < 0 \wedge y > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{per } x < 0 \wedge y < 0 \\ \pi & \text{per } x < 0 \wedge y = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Se di un numero complesso  $z$  conosciamo il modulo  $\rho$  e l'argomento  $\varphi$ , possiamo scriverlo nella **forma trigonometrica**

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi). \quad (1.4)$$

Ovviamente nella (1.4) la scelta della determinazione dell'argomento è arbitraria, cioè  $\varphi$  può essere l'argomento principale di  $z$  oppure un'altra qualunque determinazione dell'argomento stesso. Questo chiarisce ulteriormente il fatto che la scelta dell'intervallo  $(-\pi, \pi]$  è del tutto convenzionale.

La forma trigonometrica (1.4) non rappresenta soltanto un modo alternativo di scrivere un numero complesso; va infatti notato che tale forma risulta molto utile per compiere alcune importanti operazioni.

Ricordiamo che per un generico numero naturale  $n$  vale la *formula di De Moivre*, che consente di esprimere in modo semplice la potenza  $n$ -esima di  $z$ . Infatti, scritto  $z$  come nella (1.4), dove  $\varphi$  è una delle infinite determinazioni dell'argomento, si ha la formula

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi). \quad (1.5)$$

<sup>2</sup> In *Mathematica* è stata implementata anche la funzione `Atan[x, y]` (arcotangente a due variabili), che fornisce per  $(x, y) \neq (0, 0)$  l'argomento principale di  $x + iy$ , secondo la formula (1.3).

Ad esempio, per calcolare  $(1+i)^{13}$ , basta osservare che se  $z = 1+i$ , si ha  $\rho = \sqrt{2}$  e  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ; applicando allora la (1.5), si trova  $(1+i)^{13} = (\sqrt{2})^{13} \left( \cos 13 \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} 13 \frac{\pi}{4} \right) = 2^{\frac{13}{2}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = -64(1+i)$ . Si osservi che nella (1.5) non è richiesto che  $\varphi$  sia l'argomento principale di  $z$ : può trattarsi di una qualsiasi determinazione dell'argomento.

Dalla (1.5) si ricava anche l'importantissima formula per trovare le radici  $n$ -esime di un numero complesso  $z$ .

Sia  $z$  un numero complesso, e sia  $n$  un numero naturale fissato maggiore o uguale a 2. Se  $z$  è nullo, ovviamente l'unica radice  $n$ -esima di  $z$  è 0. Se invece  $z$  è un numero complesso non nullo, si indichi ancora con  $\rho$  il suo modulo e con  $\varphi$  il suo argomento principale; vale allora la seguente formula:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (1.6)$$

Nella (1.6) il simbolo  $\sqrt[n]{\rho}$  indica naturalmente l'ordinaria radice aritmetica  $n$ -esima del numero positivo  $\rho$ , cioè l'unico numero reale positivo la cui potenza  $n$ -esima dà  $\rho$ . La (1.6) va applicata  $n$  volte, con  $k$  che parte da 0 ed assume successivamente tutti i valori naturali fino ad  $n-1$ . Si ottengono così  $n$  distinti numeri complessi, il primo dei quali (ottenuto con  $k=0$ ) viene detto *radice  $n$ -esima principale* di  $z$ .

Ad esempio, per determinare le radici cubiche di  $i$ , basta osservare che per il numero  $i$  è  $\rho = 1$  e  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Applicando allora la (1.6) si trova

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right),$$

dove  $k$  è uguale successivamente a 0, 1, 2. Si hanno quindi le tre radici cubiche

$$\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} \quad (\text{radice cubica principale di } i);$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} \quad (\text{seconda determinazione della radice cubica di } i);$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -i \quad (\text{terza determinazione della radice cubica di } i).$$

Se si tracciano i tre numeri così trovati nel piano di Gauss, si osserva che i corrispondenti punti sono disposti ai vertici di un triangolo equilatero. In effetti, si osserva facilmente che, poiché nell'applicazione della (1.6) si aumenta ad ogni passaggio l'angolo della  $n$ -esima parte di un angolo giro, mentre il modulo rimane invariato, le  $n$  radici di  $z$  giacciono su una stessa circonferenza (di raggio  $\sqrt[n]{\rho}$ ), e suddividono la circonferenza stessa in  $n$  archi uguali; nel caso particolare  $n=2$  si hanno due punti diametralmente opposti (infatti le due radici quadrate di  $z$  sono ovviamente due numeri uno l'opposto dell'altro), mentre per  $n \geq 3$  la figura che si ottiene unendo i punti trovati (nello stesso ordine) è un poligono regolare di  $n$  lati. In particolare, questo significa che se  $n$  è pari le  $n$  radici sono a due a due opposte, cosicché basta determinare solo la metà di esse. Ad esempio, per calcolare le radici quarte del numero  $z = -7 + 24i$ , si osservi intanto che  $z$  ha modulo  $\rho = 25$ ,

mentre il suo argomento principale  $\varphi$  è l'angolo del secondo quadrante avente coseno uguale a  $-\frac{7}{25}$  e seno uguale a  $\frac{24}{25}$ . Allora, la formula (1.6) fornisce

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{25} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2k\pi}{4} \right) = \sqrt{5} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (1.7)$$

Ora, non è possibile calcolare direttamente il seno e il coseno di  $\frac{\varphi}{4}$ , tuttavia possiamo ottenere questo risultato applicando due volte le formule di bisezione. Siccome  $\frac{\varphi}{2}$  cade nel primo quadrante, la formula di bisezione per il coseno dà  $\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$  (inutile calcolare anche il seno di  $\frac{\varphi}{2}$ , visto che questo non viene utilizzato in seguito). Successivamente, tenendo conto del fatto che ovviamente anche  $\frac{\varphi}{4}$  giace nel primo quadrante, le due formule di bisezione danno rispettivamente

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varphi}{4} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\varphi}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \\ \operatorname{sen} \frac{\varphi}{4} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\varphi}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Allora la (1.7) per  $k = 0$  fornisce la determinazione principale della radice quarta di  $z$ :

$$\sqrt{5} \left( \cos \frac{\varphi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi}{4} \right) = \sqrt{5} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} + i \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 2 + i.$$

Ricordiamo ora dalla trigonometria che, incrementando un angolo  $\alpha$  di un angolo retto, il seno diventa il coseno dell'angolo dato, mentre il coseno diventa il seno cambiato di segno. Abbiamo quindi nel nostro caso  $\cos \left( \frac{\varphi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{sen} \frac{\varphi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$  e  $\operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\varphi}{4} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Pertanto, l'applicazione della (1.7) con  $k = 1$  dà la seconda determinazione della radice quarta di  $z$ :

$$\sqrt{5} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) \right) = \sqrt{5} \left( -\frac{1}{\sqrt{5}} + i \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = -1 + 2i.$$

Possiamo continuare allo stesso modo determinando (sempre con semplici considerazioni di trigonometria) seno e coseno degli angoli  $\frac{\varphi}{4} + \pi$  e  $\frac{\varphi}{4} + \frac{3\pi}{2}$ ; in alternativa, basta osservare che le determinazioni di  $\sqrt[4]{z}$  corrispondenti a  $k = 2$  e  $k = 3$  non sono altro che le opposte delle radici già trovate (questa considerazione ovviamente vale solo per  $n$  pari: in caso contrario, occorre calcolare esplicitamente tutte le determinazioni). In conclusione, le quattro radici quarte di  $-7 + 24i$  sono:

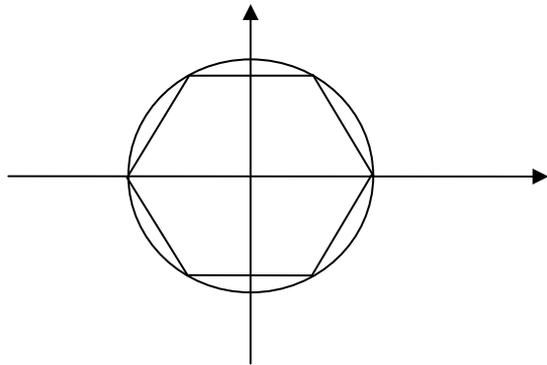
$2 + i$  (radice principale),  $-1 + 2i$ ,  $-2 - i$  e  $1 - 2i$ . Il lettore può verificare facilmente che, disegnando nel piano di Gauss questi quattro punti si ottengono i vertici di un quadrato.

Nel caso particolare  $z = 1$ , si ha  $\rho = 1$  e  $\varphi = 0$ , cosicché si ha la seguente formula che fornisce le  $n$  radici  $n$ -esime dell'unità:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1). \quad (1.8)$$

Per  $k = 0$  si ha la radice principale, che è sempre uguale ad 1; ai successivi valori di  $k$  corrisponde una rotazione, lungo la circonferenza goniometrica, di un angolo pari a  $\frac{2k\pi}{n}$ , cioè all' $n$ -esima parte di un angolo giro. Ad esempio, nel caso  $n = 6$  si trovano, oltre alla radice 1, altre cinque radici, che insieme a quella già trovata costituiscono i vertici di un esagono regolare inscritto nella circonferenza goniometrica:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \\ \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \\ \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi &= -1; \\ \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \\ \cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$



In particolare, per  $k = n - 1$  (nel nostro caso  $k = 5$ ), si ottiene l'ultima determinazione della radice  $n$ -esima di 1, che in effetti è la coniugata della radice ottenuta con  $k = 1$  (questa osservazione tornerà utile nella definizione della trasformata di Fourier discreta).

È possibile estendere al campo complesso le principali funzioni trascendenti, le quali conservano le stesse proprietà formali valide nel campo reale. Ricordiamo ad esempio come si definisce l'esponenziale complesso, cominciando con la celebre **formula di Eulero**, che consente di esprimere l'esponenziale di un numero immaginario puro tramite un'opportuna combinazione lineare di funzioni seno e coseno:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x. \quad (1.9)$$

Se invece  $z = x + iy$  è un generico numero complesso, si definisce l'esponenziale come segue:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (1.10)$$

Si ottiene così una funzione che presenta proprietà simili a quelle dell'esponenziale reale, prima tra tutte l'importantissima proprietà additiva, cioè

$$e^{z+w} = e^z e^w,$$

comunque si scelgano i numeri complessi  $z$  e  $w$ .

Si osservi che in  $\mathbb{C}$  l'esponenziale si può considerare una funzione periodica, nel senso che non muta aggiungendo all'argomento un qualsiasi multiplo intero di  $2\pi i$ . Infatti, si ha:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z.$$

Riscriviamo ora la (1.9), insieme alle formula che si ottiene sostituendovi  $-x$  al posto di  $x$ :

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \\ e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x; \end{cases} \quad (1.11)$$

sommando e sottraendo membro a membro le (1.11), si hanno le note formule

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \end{cases} \quad (1.12)$$

che esprimono seno e coseno di un numero reale come combinazioni lineari di opportuni esponenziali nel campo complesso<sup>(3)</sup>.

Da quanto detto, segue che un numero complesso  $z$  non nullo, oltre a potersi scrivere nell'ordinaria forma algebrica  $z = x + iy$ , e nella forma trigonometrica (1.4), si può anche scrivere in **forma esponenziale**, cioè:

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad (1.13)$$

dove  $\varphi$  è l'argomento principale di  $z$ , oppure indifferentemente una qualsiasi determinazione dell'argomento stesso.

## 2. FUNZIONI ORTOGONALI

Un importantissimo strumento nella rappresentazione dei segnali è quello delle funzioni ortogonali. Consideriamo una famiglia di funzioni  $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , definite in  $\mathbb{R}$  e a valori reali (è possibile però considerare anche funzioni di variabile reale ma a valori complessi); diciamo che tali funzioni sono **ortogonali** su un intervallo  $[t_0, t_0 + T]$  se

$$\int_T u_m(t) u_n(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ c, & \text{se } m = n, \end{cases} \quad (2.1)$$

dove è stata utilizzata la notazione abbreviata  $\int_T$  per indicare  $\int_{t_0}^{t_0+T}$ ; perciò, mentre l'integrale di  $u_n^2$

dà una costante  $c$  non nulla indipendente da  $n$ , ciascuna delle funzioni  $u_n$  è ortogonale a tutte le altre, cioè dà integrale nullo se moltiplicata per qualunque altra funzione della famiglia.

Un semplice esempio di famiglia di funzioni ortogonali è dato da  $u_n(t) = \operatorname{sen} nt$ , sull'intervallo  $[0, \pi]$ . Infatti, vediamo subito che per  $m \neq n$  è  $\int_0^\pi \operatorname{sen} mt \operatorname{sen} nt dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(m-n)t - \cos(m+n)t) dt$ <sup>(4)</sup> =

<sup>3</sup> Le formule (1.12) valgono per  $x$  reale, ma possono essere utilizzate per *definire* seno e coseno in  $\mathbb{C}$  (basta sostituire  $x$  con un generico  $z$  complesso).

<sup>4</sup> Qui, e in altre occasioni, si utilizzano le *formule di Werner*, che il lettore può trovare in appendice.

$= 0$ , mentre si ha  $\int_0^{\pi} \sin^2 nt dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2nt}{2} dt = \frac{\pi}{2}$ , indipendentemente da  $n$ : perciò le funzioni considerate sono ortogonali.

Altri esempi di funzioni ortogonali sono i cosiddetti **polinomi ortogonali**, il cui caso più semplice è quello dei **polinomi di Legendre**. Questi polinomi  $\{P_n(x)\}$  (con  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) sono definiti in modo da soddisfare le seguenti condizioni:

- 1) il polinomio  $P_n(x)$  ha grado  $n$ ;
- 2) per  $m \neq n$  l'integrale  $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx$  vale 0. (2.2)

Per scrivere esplicitamente i primi polinomi della successione in questione, osserviamo in primo luogo che, non essendo assegnata una condizione sul valore di  $\int_T P_n^2(x)dx$ , possiamo fissare

come  $P_0(x)$  una qualsiasi costante non nulla, ad esempio  $P_0(x) = 1$ . Il polinomio  $P_1(x)$  è di primo grado, perciò scriviamo  $P_1(x) = ax + b$ , e poniamo la condizione  $\int_{-1}^1 P_1(x)P_0(x)dx = 0$ , cioè

$\int_{-1}^1 (ax + b)dx = 0$ . Essendo  $\int_{-1}^1 (ax + b)dx = 2b$ , abbiamo  $b = 0$ , mentre  $a$  è un qualsiasi numero diverso

da 0; perciò possiamo porre  $P_1(x) = x$ . Analogamente, posto  $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ , abbiamo le condizioni  $\int_T P_2^2(x)dx \neq 0$ ,  $\int_{-1}^1 P_2(x)P_0(x)dx = 0$  e  $\int_{-1}^1 P_2(x)P_1(x)dx = 0$ , cioè  $\int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c)dx = 0$  e

$\int_{-1}^1 x(ax^2 + bx + c)dx = 0$ , da cui  $\frac{2a}{3} + 2c = 0$  e  $\frac{2b}{3}$ : deve essere quindi  $b = 0$  e  $c = -\frac{a}{3}$ , per cui una

scelta possibile è  $P_2(x) = 3x^2 - 1$  (e si osserva facilmente che per qualunque scelta di  $a$  e  $c$  costanti non nulle che rispettino questa condizione è  $\int_{-1}^1 (ax^2 + c)^2 dx \neq 0$ ). In modo analogo si procede per

determinare i successivi polinomi.

Come si osserva dai calcoli effettuati, le condizioni 1) e 2) consentono di trovare la successione dei polinomi di Legendre, ma ciascun polinomio è determinato a meno di un fattore non nullo: ad esempio, si potrebbe benissimo scegliere  $P_0(x) = -3$ ,  $P_1(x) = 2x$ ,  $P_2(x) = -3x^2 + 1$ . Per dare una definizione univoca, si può porre un'ulteriore condizione, ad esempio si può fissare il

valore di  $\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx$ : in tal modo i polinomi  $\{P_n(x)\}$  sono univocamente determinati. In realtà, per

scrivere esplicitamente i polinomi che rispettino una certa condizione di ortogonalità non si procede determinando "direttamente" i coefficienti, ma applicando altre formule più comode. Un modo possibile per determinare uno dopo l'altro i polinomi di una data famiglia è l'applicazione di una *formula di ricorrenza*; si dimostra infatti che per *ogni* famiglia di polinomi ortogonali vale una "relazione di ricorrenza a tre termini", cioè una formula del tipo

$$P_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)P_n(x) - c_n P_{n-1}(x), \quad (2.3)$$

dove i coefficienti  $a_n, b_n, c_n$  dipendono da  $n$  (si osservi che  $P_{n+1}(x)$  si ottiene come combinazione lineare dei due polinomi precedenti, ma solo uno dei due coefficienti dipende da  $x$ ).

Nel caso particolare dei polinomi di Legendre la (2.3) diventa

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)x P_n(x) - n P_{n-1}(x), \quad (2.4)$$

formula che per comodità è stata scritta in forma intera, ma in realtà rientra nel caso generale, posto  $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ ,  $b_n = 0$ ,  $c_n = \frac{n}{n+1}$ . Naturalmente, per applicare tale relazione di ricorrenza occorre conoscere i primi due termini della successione; posto  $P_0 = 1$  e  $P_1 = x$ , l'applicazione della (2.4) con  $n = 1, 2, 3, \dots$  dà:

$$2P_2(x) = 3x P_1(x) - P_0(x), \text{ da cui } 2P_2(x) = 3x^2 - 1, \text{ e quindi } P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2};$$

$$3P_3(x) = 5x P_2(x) - 2P_1(x), \text{ da cui } 3P_3(x) = 5x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) - 2x, \text{ e quindi } P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x;$$

$$4P_4(x) = 7x P_3(x) - 3P_2(x), \text{ da cui } P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8},$$

e così via.

Lo stesso risultato si ottiene applicando un'altra importante formula sulle famiglie di polinomi ortogonali, detta *formula di Rodrigues*; nel caso dei polinomi di Legendre essa assume la forma

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} D^n((x^2 - 1)^n). \quad (2.5)$$

Ricordiamo ora che è possibile dare una formula esplicita per il calcolo della derivata  $n$ -esima dei un prodotto  $f(x)g(x)$ ; vale infatti la nota *formula di Leibniz*, che formalmente ricorda molto la formula di Newton per la potenza  $n$ -esima di un binomio:

$$D^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f(x) D^{n-k} g(x). \quad (2.6)$$

Possiamo allora calcolare la derivata indicata nella (2.5) osservando che la funzione si può scrivere come  $(x-1)^n \cdot (x+1)^n$ . Siccome la derivata  $k$ -esima di  $(x-1)^n$  è  $\frac{n!}{(n-k)!} (x-1)^{n-k}$ , l'applicazione della (2.6) dà

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k} (x+1)^k, \quad (2.7)$$

e da essa è possibile ritrovare i polinomi di Legendre visti sopra. In effetti, i polinomi ottenuti con l'uso delle formule suddette verificano per  $m \neq n$  la condizione  $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0$ , mentre si ha

$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$ : contrariamente a quanto affermato prima, l'integrale di  $P_n^2$  non è una costante, ma dipende da  $n$ <sup>(5)</sup>. Se si desidera ottenere un risultato indipendente da  $n$ , si può "normalizzare" il sistema di polinomi di Legendre moltiplicando la (2.6) per il fattore  $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$ .

<sup>5</sup> In effetti, va osservato che la condizione di indipendenza da  $n$  dell'integrale del quadrato di  $u_n$  non è necessariamente rispettata "alla lettera": spesso è comodo considerare famiglie di funzioni ortogonali per le quali, come si è visto in questo caso, l'integrale di  $u_n^2$  è diverso da zero, sebbene possa variare al variare di  $n$ .

È interessante osservare che qualsiasi polinomio può essere espresso in modo unico tramite una combinazione lineare di polinomi di Legendre; infatti, trattandosi di polinomi che hanno gradi tutti diversi, essi costituiscono una *base* dello spazio dei polinomi in  $x$ . Ad esempio, sia  $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 11x + 6$ ; essendo  $P$  di quarto grado, possiamo porre

$$P(x) = AP_0(x) + BP_1(x) + CP_2(x) + DP_3(x) + EP_4(x), \quad (2.8)$$

con  $A, B, C, D, E$  costanti da determinare. Sostituendo le espressioni dette prima, e svolgendo i calcoli, si ha il sistema costituito dalle equazioni  $\frac{35}{8}E = 2$ ,  $\frac{5}{2}D = -5$ ,  $\frac{3}{2}C - \frac{15}{4}E = 0$ ,  $B - \frac{3}{2}D = 11$  e  $A - \frac{C}{2} + \frac{3}{8}E = 6$ , la cui soluzione è  $A = \frac{32}{5}$ ,  $B = 8$ ,  $C = \frac{8}{7}$ ,  $D = -2$ ,  $E = \frac{16}{35}$ , cosicché la combinazione lineare (2.8) è determinata in modo unico.

Si possono definire altre famiglie di polinomi ortogonali, procedendo come segue. Fissato un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  (che verrà detto *intervallo di ortogonalità*), si definisca in  $I$  una funzione non negativa  $w(x)$  (*funzione peso*). La funzione deve rispettare le seguenti condizioni:

- 1) l'integrale di  $w(x)$  sull'intervallo  $I$  deve essere finito e strettamente positivo;
- 2) per ogni  $n$  naturale la funzione  $x^n w(x)$  deve essere sommabile su  $I$ .

È evidente che se ad esempio  $I$  è un intervallo chiuso e limitato, allora una funzione continua e non negativa in  $I$  (che non si riduca alla funzione identicamente nulla) è accettabile come funzione peso. Vi sono peraltro alcuni interessanti casi di funzioni peso non limitate su un intervallo  $I$  limitato, oppure anche definite su un intervallo illimitato.

Si definisce quindi la famiglia  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  (che potremmo anche scrivere  $\{P_n^{(w)}(x)\}$ ) dei polinomi ortogonali in  $I$  rispetto alla funzione peso  $w$  dando condizioni analoghe alle (2.2):

- 1) ciascun polinomio  $P_n(x)$  è di grado  $n$ ;
- 2) per  $m \neq n$  risulta  $\int_I P_m(x)P_n(x)w(x)dx = 0$ . (2.9)

Si osservi che, anche se consideriamo un intervallo di ortogonalità  $I$  non coincidente con  $\mathbb{R}$ , in ogni caso i polinomi  $\{P_n^{(w)}(x)\}$  sono definiti in tutto  $\mathbb{R}$ . A seconda delle definizioni, si avrà  $\int_I P_n^2(x)w(x)dx$  uguale ad un numero  $c$  indipendente da  $n$  oppure ad un certo  $c_n$ , comunque sempre positivo. Osserviamo che, analogamente a quanto visto sopra, le condizioni (2.9) definiscono i polinomi ortogonali solo a meno di una costante moltiplicativa, che eventualmente potrà essere precisata dando opportune condizioni aggiuntive.

I polinomi di Legendre costituiscono un caso particolare di famiglia di polinomi ortogonali (l'intervallo  $I$  è  $[-1, 1]$  e  $w(x)$  è identicamente uguale a 1), ma modificando l'intervallo di ortogonalità e la funzione peso si ottengono molti altri casi di grande interesse applicativo.

Ad esempio, se si pone  $I = (-1, 1)$  e  $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , con i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  maggiori di  $-1$ , si ottiene la famiglia dei **polinomi di Jacobi**. Osservare che si è posto  $I = (-1, 1)$  anziché  $[-1, 1]$ , perché  $\alpha$  e  $\beta$  potrebbero anche essere negativi (in tal caso la funzione  $w$  presenta un limite infinito per  $x \rightarrow -1^+$  oppure per  $x \rightarrow 1^-$ , ma, essendo appunto  $\alpha$  e  $\beta$  maggiori di  $-1$ , si tratta di infiniti di ordine minore di 1, cosicché l'integrale di  $|x^n w(x)|$  è finito). Come caso particolare, possiamo porre  $\alpha = \beta$ ; in tal caso si usa indicare il valore comune di  $\alpha$  e  $\beta$  con  $\lambda - \frac{1}{2}$ , cosicché otteniamo una famiglia di polinomi ortogonali in  $(-1, 1)$  rispetto alla funzione peso

$w(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$  (con  $\lambda > -\frac{1}{2}$ ): si tratta dei **polinomi di Gegenbauer**, detti anche "polinomi ultrasferici". Si osservi che, nel caso che  $I$  sia simmetrico rispetto all'origine, e che la funzione  $w$  sia pari, abbiamo sempre  $P_n^{(w)}(x)$  pari per  $n$  pari e dispari per  $n$  dispari: perciò questa proprietà è vera per i polinomi di Legendre ed anche per i casi più generali accennati sopra.

Come esempio di famiglia di polinomi ortogonali su un intervallo illimitato, si consideri ad esempio la funzione peso  $w(x) = e^{-x}$  sull'intervallo  $I = [0, +\infty)$  (questa scelta è possibile in quanto la funzione  $x^n e^{-x}$  è sommabile su  $I$  per ogni  $n \geq 0$ ): otteniamo così la famiglia dei **polinomi di Laguerre**, che si indica con  $\{L_n(x)\}$ . Imponendo un'opportuna costante di normalizzazione, vediamo che i primi polinomi di tale sequenza sono:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1; \\ L_1(x) &= -x + 1; \\ L_2(x) &= \frac{x^2}{2} - 2x + 1; \\ L_3(x) &= -\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 3x + 1, \end{aligned}$$

ed è evidente che in questo caso si è persa la proprietà di parità e disparità detta prima. I polinomi di Laguerre possono essere generalizzati considerando, sempre sullo stesso intervallo, la funzione peso  $w(x) = x^\alpha e^{-x}$ , con  $\alpha$  parametro positivo fissato: si ottengono così i "polinomi di Laguerre generalizzati", che si indicano con  $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$ .

Un altro esempio interessante è dato dalla famiglia  $\{H_n(x)\}$  dei **polinomi di Hermite**, che sono ortogonali in  $I = \mathbb{R}$  rispetto alla funzione peso  $w(x) = e^{-x^2}$ ; in questo caso sono soddisfatte le condizioni dette prima per la parità e disparità dei polinomi, cosicché otteniamo come primi polinomi della successione i seguenti:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1; \\ H_1(x) &= 2x; \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2; \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x; \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12; \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x; \\ H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120, \end{aligned}$$

dove è stata imposta come condizione per la normalizzazione il fatto che in ogni polinomio  $H_n$  il coefficiente del termine di grado più alto sia uguale a  $2^n$ <sup>(6)</sup>.

Come caso particolare dei polinomi ultrasferici, consideriamo ancora  $I = (-1, 1)$ , e poniamo  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , il che equivale a considerare i polinomi ultrasferici con  $\lambda = 0$ . Già abbiamo osservato che tale scelta è lecita, grazie al basso ordine di infinito di  $w(x)$  agli estremi di  $I$ , ma possiamo avere un'ulteriore conferma di ciò osservando che per un generico  $n \geq 0$  l'integrale

---

<sup>6</sup> Va osservato che per particolari applicazioni (ad esempio nel Calcolo delle Probabilità) si preferisce definire i polinomi di Hermite imponendo l'ortogonalità (sempre su  $\mathbb{R}$ ) rispetto alla funzione  $w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ; questo naturalmente dà luogo ad una diversa successione di polinomi ortogonali.

improprio  $\int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , tramite la sostituzione  $x = \sin t$ , diventa  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n t dt$ , che dà senz'altro un valore finito.

I polinomi ortogonali ottenuti con questa funzione peso, indicati con  $\{T_n(x)\}$ , sono detti **polinomi di Chebyshev di prima specie**. Imponendo anche la condizione che il coefficiente del termine di grado più elevato sia  $2^{n-1}$  (a parte il polinomio di ordine 0 che si porrà uguale ad 1), otteniamo per la successione  $\{T_n(x)\}$  i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1; \\ T_1(x) &= x; \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1; \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x; \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1; \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x; \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1; \\ T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x; \\ T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1; \\ T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x, \end{aligned}$$

e così via.

Come accade per le altre famiglie di polinomi ortogonali, è possibile dare per  $\{T_n(x)\}$  una formula di ricorrenza, che definisce ciascun  $T_n$  (per  $n \geq 2$ ) in termini dei due polinomi precedenti; per i polinomi di Chebyshev di prima specie tale relazione è:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{cases} \quad (2.10)$$

Vi è anche una relazione molto interessante tra i polinomi di Chebyshev e le formule di moltiplicazione per le funzioni goniometriche. Nel par. 1 abbiamo ricordato tra l'altro la formula di De Moivre (1.5), che consente di esprimere la potenza  $n$ -esima di un numero complesso  $z$ , in termini del modulo e dell'argomento. Ora, se  $z$  è un numero di modulo 1 (che quindi si scrive come  $\cos \varphi + i \sin \varphi$ ), la (1.5) diventa:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (2.11)$$

Se sviluppiamo il primo membro della (2.11) tramite la formula del binomio di Newton, troviamo

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \varphi \cdot i^k \sin^k \varphi. \quad (2.12)$$

Ricordiamo ora che le potenze pari di  $i$  sono numeri reali, mentre quelle dispari sono numeri immaginari puri. Pertanto, il secondo membro della (2.12) si può scrivere come un numero complesso la cui parte reale è  $\cos^n \varphi - \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots$ , mentre il coefficiente dell'immaginario è  $\cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \dots$ ; siccome però ogni potenza pari di  $\sin x$  si può esprimere facilmente tramite  $\cos x$ , e siccome la parte reale detta sopra deve coincidere con  $\cos n\varphi$ , che è la parte reale del secondo membro della (2.11), concludiamo che per ogni  $n$  intero non

negativo  $\cos n\varphi$  si esprime tramite un polinomio di grado  $n$  nella variabile  $\cos x$ . Abbiamo infatti per i primi valori di  $n$ :

$$\begin{aligned}\cos(0x) &= 1; \\ \cos(1x) &= \cos x; \\ \cos(2x) &= 2\cos^2 x - 1; \\ \cos(3x) &= 4\cos^3 x - 3\cos x; \\ \cos(4x) &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1,\end{aligned}$$

e così via. Il confronto con i polinomi  $T_n$  elencati sopra mostra che i coefficienti sono gli stessi; in effetti, è possibile dimostrare che in generale vale la formula

$$\cos(nx) = T_n(\cos x) \quad (7). \quad (2.13)$$

La (2.13) consente anche di determinare esplicitamente gli zeri di un qualsiasi polinomio  $T_n(x)$ ; infatti, posto  $x = \cos t$  (con  $0 \leq t \leq \pi$ , per garantire l'invertibilità), l'equazione  $T_n(x) = 0$  diventa  $T_n(\cos t) = 0$ , cioè  $\cos nt = 0$ . Da ciò abbiamo  $nt = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , e quindi  $t = (2k+1)\frac{\pi}{2n}$ . Dovendo essere  $0 \leq t \leq \pi$ , troviamo  $0 \leq (2k+1)\frac{\pi}{2n} \leq \pi$ , da cui  $0 \leq \frac{2k+1}{2n} \leq 1$ , e quindi  $0 \leq k \leq n-1$ , visto che  $k$  può assumere solo valori interi. Dunque gli zeri di  $T_n(x)$  sono dati dalla formula

$$x_k^{(n)} = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi, \text{ con } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.14)$$

Ad esempio, gli zeri di  $T_3(x)$  sono  $x_0^{(3)} = \cos \frac{\pi}{6}$ ,  $x_1^{(3)} = \cos \frac{\pi}{2}$  e  $x_2^{(3)} = \cos \frac{5\pi}{6}$ , cioè rispettivamente  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $0$  e  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; analogamente, gli zeri di  $T_4(x)$  sono  $x_0^{(4)} = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ,  $x_1^{(4)} = \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ,  $x_2^{(4)} = \cos \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$  e  $x_3^{(4)} = \cos \frac{7\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$  (si osservi che le radici vengono determinate in ordine decrescente, dato che il coseno è decrescente tra  $0$  e  $\pi$ ). Il risultato trovato rappresenta in realtà una caratteristica generale dei polinomi ortogonali: comunque si fissi l'intervallo di ortogonalità  $I$  e la funzione peso  $w$ , ogni polinomio di ordine  $n \geq 1$  della famiglia così generata presenta esattamente  $n$  zeri, tutti reali e distinti, e tutti giacenti all'interno dell'intervallo  $I$ .

Vediamo ora come si scrive una funzione come serie di funzioni ortogonali. Fissata una famiglia  $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  di funzioni ortogonali su un intervallo di ampiezza  $T$ , consideriamo un segnale  $x(t)$  a valori reali, e supponiamo che esso si scriva come una serie di  $u_n$ , diciamo

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(t). \quad (2.15)$$

Ora, per calcolare esplicitamente i coefficienti  $a_n$  dello sviluppo in serie, moltiplichiamo i due membri della (2.15) per  $u_m(t)$  ed integriamo su  $[t_0, t_0 + T]$ , ottenendo

<sup>7</sup> In alcuni testi la (2.13) viene assunta come definizione dei polinomi di Chebyshev, e solo in seguito si dimostra l'ortogonalità di tali polinomi..

$$\int_T x(t)u_m(t)dt = \int_T \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(t) u_m(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_T u_n(t)u_m(t)dt. \quad (2.16)$$

Ma, grazie all'ortogonalità,  $\int_T u_n(t)u_m(t)dt$  è diverso da 0 solo per  $n = m$ , per cui la (2.16) diventa  $\int_T x(t)u_m(t)dt = a_m \int_T u_m^2(t)dt$ , quindi, per  $m = 0, 1, 2, \dots$  si ha

$$a_m = \frac{1}{c} \int_T x(t)u_m(t)dt. \quad (2.17)$$

Vediamo ora un'importante identità, suscettibile anche di un'interessante interpretazione fisica. Ricordiamo che il quadrato di una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  si può esprimere tramite la somma due serie, in pratica separando i quadrati dei termini  $a_n$  dai prodotti "misti"  $a_p a_q$  con  $p \neq q$ ; si ha cioè:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_p a_q.$$

Applicando tale formula alla (2.15), si ha:

$$x^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 u_n^2(t) + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_p a_q u_p(t) u_q(t). \quad (2.18)$$

Integrando su  $[t_0, t_0 + T]$ , troviamo

$$\int_T x^2(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \int_T u_n^2(t)dt + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_p a_q \int_T u_p(t)u_q(t)dt. \quad (2.19)$$

Ma ciascun termine della doppia sommatoria è nullo, per cui si ha  $\int_T x^2(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \int_T u_n^2(t)dt$ , da cui infine

$$\frac{1}{T} \int_T x^2(t)dt = \frac{c}{T} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2, \quad (2.20)$$

formula nota come *identità di Parseval*.

Ora, supponiamo che  $x(t)$  rappresenti un'intensità di corrente variabile nel tempo, in un circuito avente la resistenza di  $1 \Omega$ . Siccome nel caso di un'intensità costante  $i$  la potenza dissipata dal circuito è  $W = i^2 R$ , essendo nel nostro caso  $R = 1$ , il primo membro della (2.19) esprime la potenza media dissipata dalla resistenza nell'intervallo di tempo considerato. Ma allora la successione  $\left\{ \frac{c}{T} a_n^2 \right\}$  rappresenta la distribuzione delle potenze nel segnale  $x(t)$ .

### 3. SERIE DI FOURIER

Dedichiamo questo paragrafo ad un riassunto delle principali proprietà dello sviluppo in serie di Fourier, che rappresenta uno strumento di grande importanza nello studio dei segnali, e in generale nello studio delle proprietà delle funzioni periodiche.

Sia  $x(t)$  una funzione periodica di periodo  $T$ , che sia anche *sommabile* in ciascun intervallo di ampiezza uguale ad un periodo, cioè tale che  $\int_T x(t)dt$  sia finito; ciò è senz'altro vero per una funzione continua in ogni intervallo chiuso e limitato, ma qui consideriamo una classe più generale di funzioni: ad esempio,  $x(t)$  potrebbe essere limitata ma avere una o più discontinuità di salto, oppure può essere una funzione illimitata, comunque tale che l'integrale del suo modulo sia finito.

Come è uso comune nello studio dei fenomeni periodici in Fisica, definiamo la grandezza  $\omega_0$  tramite la formula

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.1)$$

Questo numero  $\omega_0$ , indicato con il termine **pulsazione**, rappresenta la "frequenza angolare fondamentale" del fenomeno considerato, e si esprime in radianti al secondo. Ad esempio, nel caso di un punto in moto circolare uniforme, se il periodo è di  $T$  secondi, la pulsazione esprime l'angolo descritto dal punto considerato in un secondo, misurato in radianti. Si può anche scrivere  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , dove  $f_0$  indica la frequenza (inverso del periodo, cioè numero di cicli al secondo).

Per un motivo che sarà chiaro più avanti, per scrivere lo sviluppo in serie di Fourier consideriamo una *doppia* successione di funzioni ortogonali. Più esattamente, consideriamo l'insieme di funzioni

$$\{1, \cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t\}, \quad (3.2)$$

con  $n = 1, 2, \dots$ ; non è difficile osservare che per la famiglia (3.2) valgono proprietà di ortogonalità analoghe alla (2.1): non solo infatti è  $\int_T \cos n\omega_0 t dt = \int_T \sin n\omega_0 t dt = 0$ , ma per  $m$  ed  $n$  naturali si ha:

$$\int_T \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = \begin{cases} T/2 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n; \end{cases}$$

$$\int_T \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt = \begin{cases} T/2 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n; \end{cases}$$

$$\int_T \cos m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt = 0, \text{ comunque si scelgano } m \text{ ed } n.$$

Tramite le funzioni (3.2), lo sviluppo in serie di  $x(t)$  assume la seguente forma:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t. \quad (3.3)$$

Ora, con un ragionamento analogo a quello che ci ha consentito di ottenere la (2.17), si può far vedere che per i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_T x(t) dt; \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (n = 1, 2, \dots); \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \text{senn} n\omega_0 t dt \quad (n = 1, 2, \dots).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Naturalmente, questi integrali hanno senso grazie all'ipotesi di sommabilità. Analogamente a quanto detto prima nel caso della rappresentazione con una sola successione di funzioni ortogonali, possiamo dire che il segnale  $x(t)$  è completamente definito dall'insieme di numeri reali  $\{a_0, a_n, b_n\}$ . L'identità di Parseval (2.19) assume in questo caso la forma

$$\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \tag{3.5}$$

ed anche qui possiamo dare un'interpretazione fisica di tale identità, identificando la distribuzione della potenza nel segnale  $x(t)$  con l'insieme di numeri reali  $\left\{a_0^2, \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)\right\}$

È possibile definire la serie di Fourier in un modo diverso, considerando una famiglia di funzioni ortogonali a valori complessi.

Per quanto detto nel par. 1, si ha  $\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t})$  e  $\text{senn} n\omega_0 t = \frac{1}{2i}(e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t})$ ; perciò, la (3.3) si può anche scrivere:

$$\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}) + \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}) = \\
&= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}) - ib_n (e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t})] = \\
&= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - ib_n) e^{in\omega_0 t} + (a_n + ib_n) e^{-in\omega_0 t}].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Poniamo ora, per ogni  $n$  naturale:

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n). \tag{3.7}$$

Sostituendo i valori di  $a_n$  e  $b_n$  dati dalle (3.4), si ha:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos n\omega_0 t dt - i \frac{2}{T} \int_T x(t) \text{senn} n\omega_0 t dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \int_T x(t) (\cos n\omega_0 t - i \text{senn} n\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-in\omega_0 t} dt.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Analogamente, possiamo indicare con  $c_{-n}$  il termine  $\frac{1}{2}(a_n + ib_n)$  (osserviamo anche che  $c_{-n}$  è il coniugato di  $c_n$ ); ragionando come sopra, abbiamo la formula

$$c_{-n} = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{in\omega_0 t} dt. \quad (3.9)$$

Perciò la (3.6) diventa:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega_0 t} + c_{-n} e^{-in\omega_0 t}) = a_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}.$$

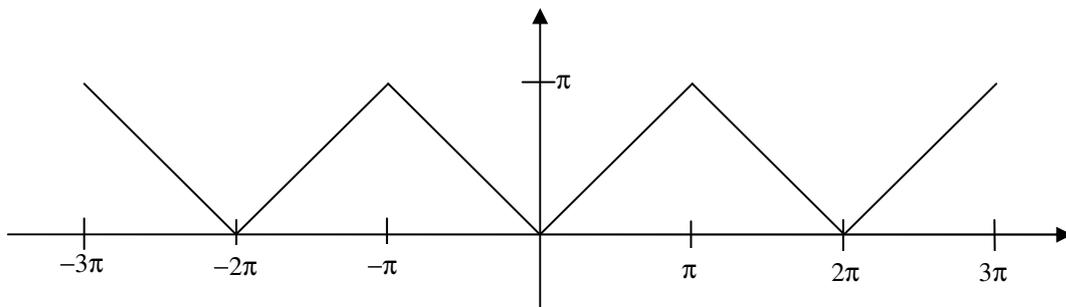
Siccome poi è  $c_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = a_0$ , si può scrivere in conclusione:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}. \quad (3.10)$$

Con la (3.10) abbiamo quindi espresso il segnale  $x(t)$  come una serie "bilatera" (in cui cioè l'indice  $n$  varia in tutto l'insieme dei numeri interi) di esponenziali.

Prima di proseguire, vediamo qualche esempio di sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica assegnata.

Cominciamo con il seguente esempio: sia  $x(t) = |t|$  nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ ; sia poi  $x(t)$  definita su tutto  $\mathbb{R}$  prolungando per periodicità la  $x$  già definita. Otteniamo così una funzione il cui grafico appare come in figura:



Osserviamo che, essendo uguali i valori di  $x$  agli estremi dell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , la funzione è continua in tutto  $\mathbb{R}$ . Dato che il periodo di  $f$  è  $2\pi$ , le formule (3.4) diventano in questo caso:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt dt \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

In realtà, i termini  $b_n$  sono nulli, poiché l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto a 0 è nullo. Per quanto riguarda invece i coefficienti  $a_n$ , abbiamo:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{\pi}{2}; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos nt dt \text{ per } n = 1, 2, \dots$$

Quest'ultimo integrale si può anche scrivere  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt$ , dato che la funzione integranda è pari. Calcolando l'integrale per parti, si ha facilmente  $a_n = \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - \cos 0)$ , che è uguale a  $-\frac{2}{\pi n^2} (1 - (-1)^n)$ , essendo  $\cos n\pi = (-1)^n$ . Perciò  $a_n$  è nullo per  $n$  pari, mentre per  $n$  dispari vale  $-\frac{4}{\pi n^2}$ . In conclusione, abbiamo la seguente serie di Fourier:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi \cdot 1^2} \cos t - \frac{4}{\pi \cdot 3^2} \cos 3t - \frac{4}{\pi \cdot 5^2} \cos 5t - \dots, \quad (3.11)$$

che si può anche scrivere nella forma  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$ .

Volendo scrivere la serie nella forma (3.10), calcoliamo il coefficiente  $c_n$ :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| (\cos nt - i \operatorname{sen} nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos nt dt - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \operatorname{sen} nt dt.$$

Per  $n = 0$  si ha  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{\pi}{2}$ . Per gli altri valori di  $n$ , osserviamo intanto che il termine  $-\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \operatorname{sen} nt dt$  è nullo, essendo la funzione integranda dispari. Si ha allora  $c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt$ , che è uguale alla metà del coefficiente  $a_n$  calcolato prima, e quindi vale  $-\frac{2}{\pi n^2}$  per i soli  $n$  dispari. In conclusione, la serie è:

$$\dots - \frac{2}{\pi \cdot 5^2} e^{-5it} - \frac{2}{\pi \cdot 3^2} e^{-3it} - \frac{2}{\pi \cdot 1^2} e^{-it} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi \cdot 1^2} e^{it} - \frac{2}{\pi \cdot 3^2} e^{3it} - \frac{2}{\pi \cdot 5^2} e^{5it} - \dots$$

Ricordando che  $e^{-it} + e^{it}$  è uguale a  $2 \cos t$ , la somma dei termini  $-\frac{2}{\pi \cdot 1^2} e^{-it}$  e  $-\frac{2}{\pi \cdot 1^2} e^{it}$  dà  $-\frac{2}{\pi \cdot 1^2} \cdot 2 \cos t = -\frac{4}{\pi \cdot 1^2} \cos t$ . Analogamente, si ha  $-\frac{2}{\pi \cdot 3^2} e^{-3it} - \frac{2}{\pi \cdot 3^2} e^{3it} = -\frac{4}{\pi \cdot 3^2} \cos 3t$ ,  $-\frac{2}{\pi \cdot 5^2} e^{-5it} - \frac{2}{\pi \cdot 5^2} e^{5it} = -\frac{4}{\pi \cdot 5^2} \cos 5t$ , e così via, per cui si ritrova la serie (3.11).

Consideriamo ora la funzione  $x(t) = \operatorname{frac}(t)$ , “parte decimale” o “parte frazionaria” del numero reale  $t$ . Tale funzione, a volte indicata con il simbolo  $\{t\}$ , si può anche esprimere come  $t - [t]$ , dove  $[t]$  è la parte intera del numero reale  $t$  (massimo numero intero minore o uguale a  $t$ ). La funzione  $\operatorname{frac}(t)$  è già di per sé definita come periodica di periodo 1, ma si può anche vedere come il prolungamento per periodicità della funzione  $g(t) = t$  sull'intervallo  $[0, 1)$ .

Essendo in questo caso  $\omega_0 = 2\pi$ , le formule (3.4) danno:

$$a_0 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}; \quad a_n = 2 \int_0^1 t \cos 2\pi n t dt \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$b_n = 2 \int_0^1 t \sin 2\pi n t dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Integrando anche in questo caso per parti, troviamo facilmente  $a_n = 0$  (per  $n \geq 1$ ) e  $b_n = -\frac{1}{\pi n}$ , cosicché si ha la serie

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n t}{n}.$$

Dunque abbiamo visto che in generale, data una qualsiasi funzione periodica (purché sommabile in un periodo), per determinare i coefficienti della serie di Fourier occorre calcolare degli integrali dipendenti da  $n$ , eventualmente utilizzando le proprietà di parità o disparità della funzione (se la funzione è pari si avrà una serie di soli coseni, se è dispari di soli seni).

Ci chiediamo ora quale sia la relazione tra la funzione data e la sua serie di Fourier. Infatti, scrivendo la (2.15) abbiamo supposto che  $x(t)$  si rappresenti come una serie di date funzioni ortogonali, e da qui abbiamo ricavato i coefficienti di tale sviluppo; allo stesso modo, abbiamo ricavato i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  partendo dalla (3.3). Occorre quindi stabilire in generale la serie di Fourier di una data funzione converge alla funzione stessa oppure no.

La risposta dipende da come definiamo il concetto di convergenza. Se intendiamo parlare di convergenza puntuale (o anche uniforme), vi sono alcuni teoremi che forniscono una risposta alla questione; prima però vediamo che è possibile affrontare il problema da un diverso punto di vista, dando un'opportuna definizione di convergenza di una successione (e analogamente di una serie) in un modo diverso, che fa uso degli integrali.

Si consideri lo spazio di tutte le funzioni definite su un certo intervallo  $I$ , tali che  $|f(x)|^2$  sia una funzione sommabile in  $I$ ; tale spazio viene comunemente indicato con  $L^2(I)$ <sup>(8)</sup>.

Ora, definiamo la convergenza di una successione  $\{f_n(x)\}$  di funzioni di  $L^2(I)$  ad un funzione  $f$  (appartenente allo stesso spazio) come segue: diciamo che  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  "in norma  $L^2$ " (cioè nello spazio suddetto) se risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f(x) - f_n(x)|^2 dx = 0. \quad (3.12)$$

La condizione (3.12) esprime il fatto che  $\{f_n(x)\}$  converge ad  $f$ , ma nel senso che lo "scarto quadratico medio" tra  $f_n$  ed  $f$  tende ad annullarsi: dunque si ha un "avvicinamento globale" della successione alla funzione limite, ma nulla si può dire sulla convergenza puntuale (e a maggior ragione neanche su quella uniforme).

<sup>8</sup> Per dare una definizione soddisfacente degli spazi  $L^p(I)$  (con  $p \geq 1$ ), bisognerebbe considerare in realtà le funzioni definite in  $I$  (indifferentemente a valori reali o complessi) tali che la potenza  $p$ -esima di  $|f(x)|$  sia sommabile in  $I$ , intendendo però l'integrale *nel senso della teoria di Lebesgue*. Non è possibile riassumere in breve questa importantissima teoria dell'integrazione, perciò il lettore può benissimo immaginare di considerare funzioni "sommabili" nel senso ordinario: può trattarsi ad esempio di funzioni continue, oppure di funzioni che presentino solo discontinuità di salto, oppure anche funzioni che presentano asintoti verticali, ma tali che comunque l'integrale su  $I$  di  $|f(x)|^p$  sia finito. La teoria dell'integrazione di Lebesgue risulta particolarmente potente per vari motivi: in primo luogo si hanno teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale applicabili sotto ipotesi molto leggere, in secondo luogo si ottengono spazi di funzioni completi, ai quali sono applicabili i più importanti risultati di Analisi Funzionale.

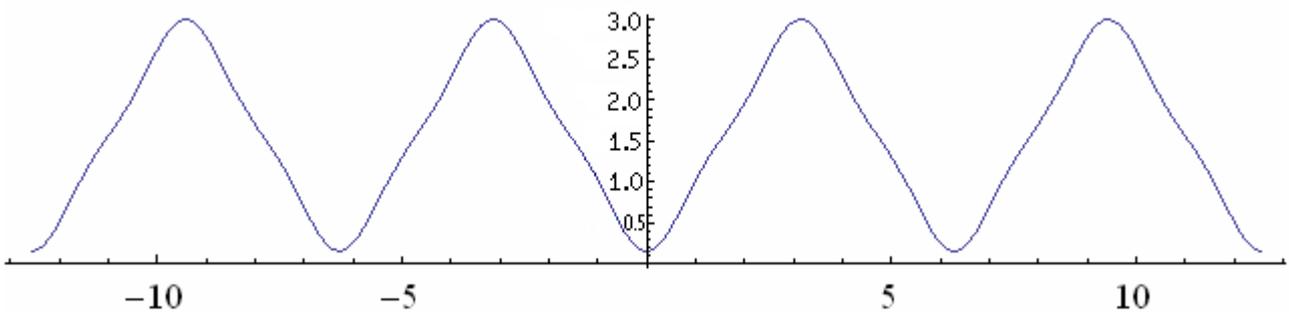
La stessa condizione si può dare per le serie di funzioni: dire che ad esempio la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge in norma  $L^2$  alla funzione somma  $s(x)$  significa che la successione  $\{s_n(x)\}$ , dove al solito le somme parziali  $s_n(x)$  sono definite come  $s_1(x) = f_1(x)$ ,  $s_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ,  $s_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ , ..., converge ad  $s(x)$  secondo il significato di convergenza detto prima; cioè, dovrà essere  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |s(x) - s_n(x)|^2 dx = 0$ .

Ora, nel caso delle serie di Fourier, si può dimostrare che, se  $x(t)$  è una funzione di quadrato sommabile in un periodo, la serie corrispondente converge sempre alla funzione  $x(t)$  in norma  $L^2$  (cioè appunto secondo il significato di convergenza ora specificato).

Rimane naturalmente il problema dell'eventuale convergenza puntuale della serie di Fourier alla funzione data. Per avere un'idea della risposta a questa domanda, proviamo ad osservare meglio le serie trovate in precedenza. Dalla funzione vista nel primo esempio, definita come prolungamento per continuità della funzione  $|t|$  su  $[-\pi, \pi]$ , abbiamo ricavato la serie  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$ . Consideriamo ora la ridotta di ordine 1 di tale serie:

$$x_2(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi \cdot 1^2} \cos t - \frac{4}{\pi \cdot 3^2} \cos 3t,$$

e tracciamone il grafico:



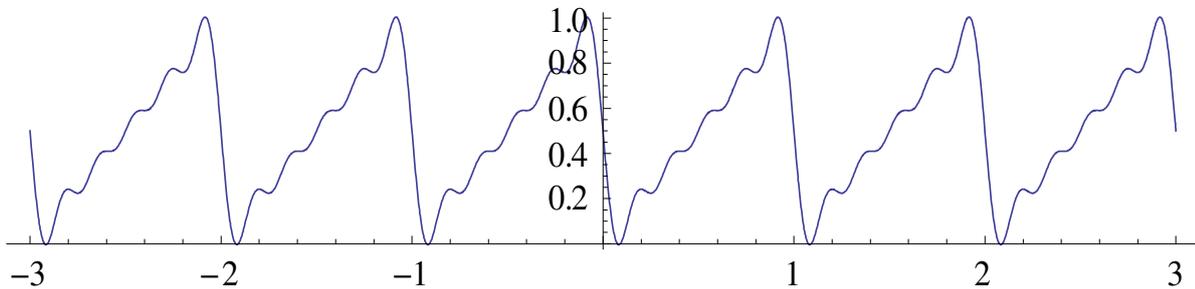
Si vede bene che, a parte qualche "ondulazione", già la  $x_2(t)$  approssima abbastanza bene la  $x(t)$ , per cui si può ragionevolmente pensare che al crescere di  $n$  la somma  $x_n(t)$  converga a  $x(t)$ . Per valutare meglio la convergenza, sostituiamo alcuni valori di  $t$  nella serie. Ad esempio, per  $t = 0$  la

serie diventa  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ , essendo  $\cos 0 = 1$ . Ma siccome la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$  converge a  $\frac{\pi^2}{8}$ <sup>9</sup>, si ha  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \frac{\pi^2}{8} = 0$ , che è appunto  $x(0)$ . È facile l'analogo controllo per  $t = \frac{\pi}{2}$ : in tal caso la serie si riduce al solo termine  $\frac{\pi}{2}$ , che coincide con  $x\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

<sup>9</sup> Questo risultato, ed altri simili che possono essere utilizzati in questi casi, si dimostrano come segue. Si consideri intanto che  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$  è uguale a  $\frac{\pi^2}{6}$  (questo è un noto risultato di cui esistono varie dimostrazioni,

anche elementari). Grazie all'assoluta convergenza, la serie si può scrivere  $\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right)$ ; ma quest'ultima serie è uguale a  $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{24}$ , per cui si ha  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$ .

Vediamo ora cosa accade per la serie  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} 2\pi n t}{n}$  ottenuta da  $x(t) = \text{frac}(t)$ , tracciando il grafico della ridotta  $x_5(t) = \frac{1}{2} - \frac{\text{sen} 2\pi t}{\pi} - \frac{\text{sen} 4\pi t}{2\pi} - \frac{\text{sen} 6\pi t}{3\pi} - \frac{\text{sen} 8\pi t}{4\pi} - \frac{\text{sen} 10\pi t}{5\pi}$ :



A parte le ondulazioni decisamente più pronunciate rispetto all'altro caso (il che fa intuire una convergenza più lenta), la somma parziale considerata sembra approssimare abbastanza bene la  $x(t)$  data negli intervalli  $(n, n+1)$ ; ad esempio, per  $t = \frac{1}{4}$  è  $\text{sen} 2\pi \frac{1}{4} = \text{sen} \frac{\pi}{2} = 1$ ,  $\text{sen} 4\pi \frac{1}{4} = \text{sen} \pi = 0$ ,  $\text{sen} 6\pi \frac{1}{4} = \text{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$ ,  $\text{sen} 8\pi \frac{1}{4} = \text{sen} 2\pi = 0$ , ..., per cui la serie diventa  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right)$ , la cui somma è  $\frac{1}{4}$ , come si trova subito ricordando il noto risultato  $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$ <sup>(10)</sup>. Ma, per i  $t$  interi (che sono i punti di discontinuità della funzione  $x$ ), la situazione è diversa. Ad esempio, per  $t = 0$  la serie converge ad  $\frac{1}{2}$ , che non coincide con  $\text{frac}(0)$ . In effetti, la funzione somma della serie di Fourier coincide con  $\text{frac}(t)$  negli intervalli  $(n, n+1)$ , mentre per  $t$  intero vale  $\frac{1}{2}$ ; si ha quindi una funzione somma discontinua, che non coincide puntualmente con la  $x(t)$  assegnata.

Non potendo trattare qui in dettaglio il problema della convergenza puntuale della serie di Fourier, ci limitiamo a riportare il risultato di maggiore interesse nelle applicazioni. Ricordiamo che per una funzione  $x(t)$  definita in un intorno del punto  $t_0$  si dice che  $t_0$  è un punto di **discontinuità di prima specie** (o **di salto**) se esistono finiti (e distinti tra di loro) i due limiti

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} x(t).$$

Tali limiti possono essere indicati brevemente con i simboli  $x(t_0^-)$  e  $x(t_0^+)$ , rispettivamente. Ricordiamo inoltre che con i simboli  $x'(t_0^-)$  e  $x'(t_0^+)$  si indicano la **derivata sinistra** e la **derivata destra** della funzione  $x$  nel punto  $t_0$ ; tali numeri si definiscono rispettivamente tramite le formule

$$x'(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h};$$

$$x'(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}.$$

Possiamo allora enunciare il seguente importante teorema:

<sup>10</sup> È un caso particolare del noto sviluppo  $\text{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ . Inizialmente questo risultato si dimostra per  $|x| < 1$ , ma poi si osserva che si può estendere anche ad  $x = 1$ , anche se nel caso  $x = 1$  la convergenza è molto lenta.

**TEOREMA 1.** Sia  $x(t)$  sommabile e di periodo  $T$ ; se in  $t_0$  la  $x$  è continua oppure ha una discontinuità di salto, e se esistono in  $t_0$  la derivata destra e la derivata sinistra della funzione  $x$ , allora la serie di Fourier relativa alla  $x$  assegnata per  $t = t_0$  converge alla somma  $\frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$ .

Questo spiega il comportamento delle due serie di Fourier viste sopra. Nel primo caso abbiamo considerato una  $x(t)$  continua, dotata in ogni punto di derivata destra e sinistra: abbiamo allora la convergenza puntuale della serie alla funzione data. Nel secondo caso invece la serie converge alla funzione data in tutti i punti in cui questa è continua (in tali punti è anche  $x'(t) = 1$ ), mentre nei punti di discontinuità di  $x$  (corrispondenti a  $t = n$  intero), visto che comunque esistono le derivate destra e sinistra della funzione, la serie converge al valore  $\frac{x(n^-) + x(n^+)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$  <sup>(11)</sup>.

**Esercizio 3.1.** Scrivere la serie di Fourier di  $x(t)$  di periodo  $2\pi$  definita in  $[-\pi, \pi]$  come segue:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\pi \leq t \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + t & \text{per } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} - t & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{per } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Verificare inoltre esplicitamente che la serie così trovata converge alla funzione  $x(t)$  per i seguenti valori:  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  $t = \pi$ .

{Soluzione:  $\frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi \cdot 1^2} \cos t + \frac{4}{\pi \cdot 2^2} \cos 2t + \frac{2}{\pi \cdot 3^2} \cos 3t + \frac{2}{\pi \cdot 5^2} \cos 5t + \frac{4}{\pi \cdot 6^2} \cos 6t + \frac{2}{\pi \cdot 7^2} \cos 7t + \dots$ ,

cioè  $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n^2} \cos nt$ , dove  $p_n = 2$  per  $n$  dispari,  $p_n = 4$  per  $n \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $p_n = 0$  per

$n \equiv 0 \pmod{4}$ ; per le verifiche richieste, occorre utilizzare l'identità  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + \dots = \frac{\pi^2}{32}$ , che il lettore è invitato a dimostrare seguendo il procedimento illustrato nella nota 6.}

**Esercizio 3.2.** Sia  $x(t)$  la funzione di periodo 2 definita nell'intervallo  $[-1, 1]$  dalla formula  $x(t) = t^2$ . Dopo aver verificato che  $x$  è continua in tutto  $\mathbb{R}$ , e che in ogni  $t$  è dotata di derivata destra e

<sup>11</sup> È opportuno spiegare bene in quale senso diciamo che "esistono le derivate destra e sinistra", perché per una funzione discontinua le definizioni date potrebbero far sorgere dei dubbi. Sia ad esempio  $x(t) = \text{frac}(t)$ ; la derivata destra della funzione in 0 vale 1, come si vede subito scrivendo il rapporto incrementale  $\frac{x(0+h) - x(0)}{h} = \frac{h}{h}$  (con  $h > 0$ ) e passando

al limite per  $h \rightarrow 0^+$ . Se però eseguiamo l'analogo calcolo a sinistra, ponendo  $-1 < h < 0$ , troviamo  $\frac{x(0+h) - x(0)}{h} =$

$= \frac{\text{frac}(h)}{h}$ , che è uguale a  $\frac{h - [h]}{h} = \frac{h+1}{h} = 1 + \frac{1}{h}$ ; si avrebbe quindi  $x'(0^-) = -\infty$ . In realtà, nell'enunciato del teor. 1, la

condizione di "esistenza della derivata a destra e a sinistra" significa che devono esistere separatamente tali derivate, ma con l'intesa che di volta in volta la funzione sia stata prolungata per continuità nel punto  $t_0$ , il che è senz'altro possibile, visto che per ipotesi esistono finiti i limiti di  $x(t)$  per  $t \rightarrow t_0^-$  e per  $t \rightarrow t_0^+$ . Ad esempio, per  $x(t) = \text{frac}(t)$ , se  $t$  varia in un piccolo intorno sinistro di 0, e se poniamo  $x(0) = 1$ , è facile verificare che la derivata sinistra della funzione vale 1.

sinistra, scrivere la serie di Fourier ad essa relativa. Sostituire quindi  $t = 1$  nella serie così trovata, per riottenere la formula  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Sostituire infine  $t = \frac{1}{2}$  per trovare l'identità  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ .

$$\{ \text{Soluzione: } \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi t . \}$$

**Esercizio 3.3.** Sia  $x(t)$  la funzione di periodo 2 definita nell'intervallo  $[-1, 1]$  tramite la formula  $x(t) = t^3 - t$ . Dopo aver verificato che la  $x$  così definita è continua e derivabile per ogni  $t$  reale, scrivere la serie di Fourier ad essa relativa. Sostituire quindi  $t = \frac{1}{2}$  per trovare l'identità

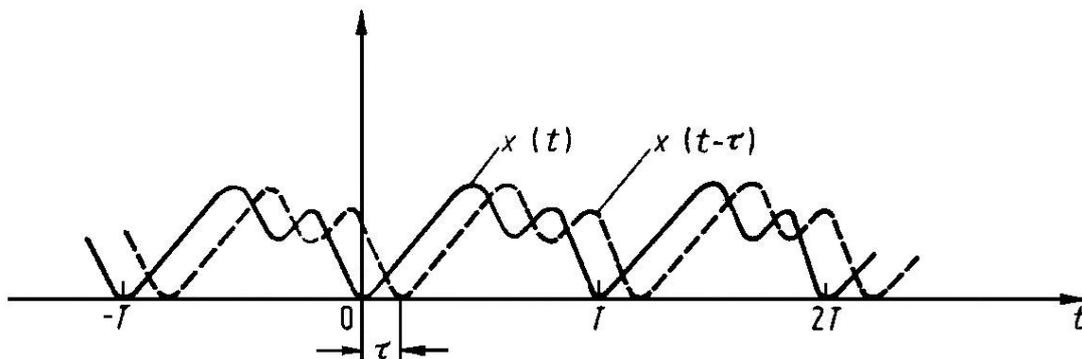
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}. \{ \text{Soluzione: } \frac{12}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} n\pi t . \}$$

**Esercizio 3.4.** Sia  $x(t)$  la funzione di periodo 2 definita nell'intervallo  $[-1, 1]$  tramite la formula  $x(t) = 3t^5 - 7t^3 + 10t$ . Dopo aver verificato che la  $x$  così definita è continua e derivabile per ogni  $t$  reale, scrivere la serie di Fourier ad essa relativa. Sostituire quindi  $t = \frac{1}{2}$  per trovare l'identità

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}. \{ \text{Soluzione: } \frac{720}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \operatorname{sen} n\pi t . \}$$

#### 4. SPETTRI DI POTENZA, DI AMPIEZZA E DI FASE

Sappiamo che un generico segnale  $x(t)$ , periodico di periodo  $T$ , si può rappresentare con un grafico in cui uno stesso arco di curva si ripete indefinitamente. Consideriamo ora il segnale  $x(t - \tau)$ , dove  $\tau$  è una certa quantità di tempo arbitrariamente fissata. Se ad esempio  $\tau$  è un numero positivo, abbastanza piccolo rispetto a  $T$ , si potrà ottenere un grafico come in figura, dove la curva grafico di  $x(t)$  è stata spostata a destra di una misura  $\tau$ :



Supponiamo ora che il dato segnale  $x$  si rappresenti in serie di Fourier; utilizzando la serie di esponenziali complessi, possiamo scrivere  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$ , da cui otteniamo

$$x(t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0(t - \tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega_0 \tau} \cdot e^{in\omega_0 t}. \quad (4.1)$$

La (4.1) fornisce quindi lo sviluppo in serie di Fourier della funzione  $x(t - \tau)$ ; possiamo anche scrivere  $x(t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,\tau} e^{in\omega_0 t}$ , dove il coefficiente  $c_{n,\tau}$  dipende da  $n$  e da  $\tau$  secondo la formula

$$c_{n,\tau} = c_n e^{-in\omega_0 \tau}. \quad (4.2)$$

Ora ricordiamo che l'esponenziale di un numero immaginario puro (avente cioè parte reale nulla) è un numero complesso di modulo 1, come si vede dalla (1.5). Questo significa che  $c_{n,\tau}$  ha lo stesso modulo di  $c_n$ , che coincide anche con il modulo di  $c_{-n}$ . Abbiamo dunque, per ogni valore di  $\tau$ :

$$|c_{n,\tau}| = |c_n| = |c_{-n}|. \quad (4.3)$$

Definiamo allora lo **spettro di potenza** relativo allo sviluppo di Fourier del segnale  $x(t)$  come la successione bilatera  $\{P_n\}$  definita dalla formula

$$P_n = |c_n|^2, \quad (4.4)$$

con  $n$  che varia in tutto l'insieme  $\mathbb{Z}$  dei numeri interi. Ciascun  $P_n$  viene anche detto **punto spettrale**. Da quanto detto sopra, è evidente che  $P_n$ :

- è sempre un numero reale non negativo;
- è indipendente da  $\tau$ ;
- è una funzione pari di  $n$ .

In modo del tutto analogo, definiamo anche lo **spettro di ampiezza** relativo allo sviluppo di Fourier del segnale  $x(t)$  come la successione bilatera  $\{p_n\}$ , dove

$$p_n = \sqrt{P_n} = |c_n|, \quad (4.5)$$

sempre con  $n$  variabile in  $\mathbb{Z}$ . Valgono naturalmente per  $p_n$  le stesse proprietà già dette per  $P_n$ .

Definiamo infine lo **spettro di fase** relativo allo sviluppo di Fourier del segnale  $x(t)$  la successione bilatera  $\{\Psi_n\}$  definita come segue: per  $n = 0$  poniamo  $\Psi_0 = 0$ ; per gli altri valori interi di  $n$  poniamo invece  $\Psi_n$  uguale all'argomento principale del numero complesso  $c_n$ .

Va osservato che in realtà la definizione detta sopra è valida per  $c_n$  non appartenente all'insieme dei numeri reali negativi, perché altrimenti viene a mancare una proprietà di simmetria. Vedremo in un esempio successivo come si risolve la questione in questi casi.

Ora, se trasliamo  $x(t)$  come detto sopra, osserviamo che per la (3.3) l'argomento di  $c_{n,\tau}$  non coincide con l'argomento di  $c_n$ , il che implica che lo spettro di fase dipende da  $\tau$  (diversamente dallo spettro di potenza che invece è indipendente da  $\tau$ ). Se però consideriamo il segnale  $Kx(t)$ , vediamo

subito che il suo sviluppo in serie di Fourier è  $Kx(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (Kc_n) e^{in\omega_0 t}$ , il che vuol dire che lo spettro

di fase è indipendente dall'amplificazione o attenuazione del segnale (mentre lo spettro di potenza e lo spettro di ampiezza dipendono dal fattore  $K$ ). Inoltre, siccome numeri coniugati hanno argomenti principali opposti (appunto con l'eccezione dei numeri reali negativi, caso che vedremo tra poco), ricordando che  $c_{-n} = \overline{c_n}$ , abbiamo  $\Psi_{-n} = -\Psi_n$ . In conclusione,  $\Psi_n$ :

- è indipendente dal fattore  $K$ ;
- dipende da  $\tau$ ;

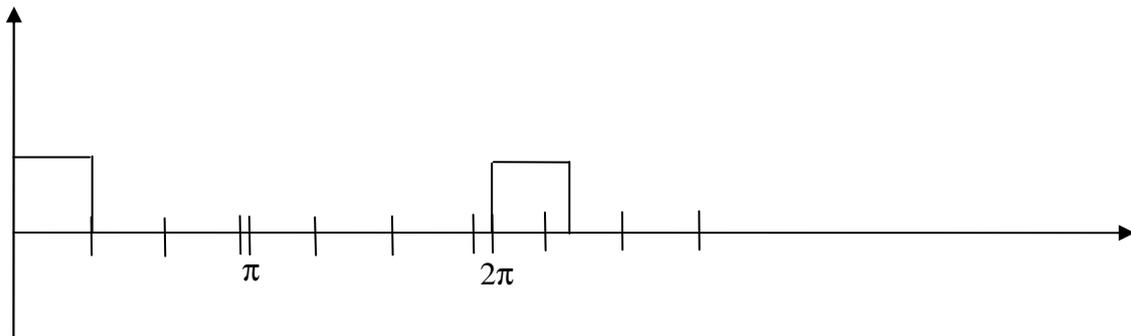
- è una funzione dispari di  $n$ .

Possiamo allora osservare quanto segue: essendo  $p_n$  e  $\Psi_n$  rispettivamente modulo ed argomento del numero complesso  $c_n$ , si può scrivere  $c_n = p_n e^{i\Psi_n} = p_n(\cos \Psi_n + i \operatorname{sen} \Psi_n)$ , o anche  $c_n = \sqrt{P_n} e^{i\Psi_n}$ . Perciò, se sono noti lo spettro di fase e lo spettro di ampiezza (o indifferentemente di potenza), è possibile ricostruire il segnale  $x(t)$ .

Vediamo un esempio. Sia  $x(t)$  il segnale di periodo  $2\pi$  definito su  $[0, 2\pi)$  come segue:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{per } 1 \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

Perciò  $x(t)$  ha quindi il seguente grafico:



Scriviamo la serie di Fourier relativa al segnale considerato. Ricordando che in questo caso è  $\omega_0 = 1$ , abbiamo intanto  $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_T x(t) dt = \frac{1}{2\pi}$ . Inoltre, per ogni  $n$  intero non nullo è:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_T x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-int}}{-ni} \right]_0^1 = \frac{i}{2\pi n} (e^{-in} - 1) = \\ &= \frac{i}{2\pi n} (\cos n - i \operatorname{sen} n - 1) = \frac{\operatorname{sen} n - i(1 - \cos n)}{2\pi n}. \end{aligned}$$

La parte reale di  $c_n$  è  $\frac{\operatorname{sen} n}{2\pi n}$ , mentre il coefficiente dell'immaginario è  $= -\frac{1 - \cos n}{2\pi n}$  (si osservi che nessuno di questi due numeri può annullarsi, in quanto, essendo  $\pi$  un numero irrazionale, per ogni  $n$  intero è sempre  $\operatorname{sen} n \neq 0$  e  $\cos n \neq 1$ ). Allora, calcolando il modulo di  $c_n$  otteniamo facilmente lo spettro di ampiezza del segnale considerato:

$$|c_n| = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen} n}{2\pi n}\right)^2 + \left(\frac{1 - \cos n}{2\pi n}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 - \cos n}}{\pi |n| \sqrt{2}}. \quad (4.6)$$

Per quanto riguarda lo spettro di fase, osserviamo che  $\arg(c_n)$  è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{2(1 - \cos n)}} \\ \operatorname{sen} \varphi = -\sqrt{\frac{1 - \cos n}{2}}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Ad esempio, per  $n = 1$  è  $c_1 = \frac{\operatorname{sen}1 - i(1 - \cos1)}{2\pi} = \frac{\operatorname{sen}1}{2\pi} - \frac{i(1 - \cos1)}{2\pi}$ ; dalla (4.6) si trova

$$|c_1| = \frac{\sqrt{1 - \cos1}}{\pi\sqrt{2}}, \text{ mentre il sistema (4.7) diventa } \begin{cases} \cos\varphi = \frac{\operatorname{sen}1}{\sqrt{2(1 - \cos1)}} \\ \operatorname{sen}\varphi = -\sqrt{\frac{1 - \cos1}{2}}, \end{cases} \text{ per cui si ha un argomento}$$

principale compreso tra  $-\frac{\pi}{2}$  e 0. In realtà, grazie alle note formule di bisezione, la seconda

equazione di questo sistema si può anche scrivere  $\operatorname{sen}\varphi = -\operatorname{sen}\frac{1}{2}$ , per cui è  $\Psi_1 = -\frac{1}{2}$ . Per  $n = -1$  si

ha invece  $c_{-1} = \frac{-\operatorname{sen}1 - i(1 - \cos1)}{-2\pi} = \frac{\operatorname{sen}1}{2\pi} + \frac{i(1 - \cos1)}{2\pi}$ , che è il coniugato di  $c_1$ ; si troverà allora

$|c_{-1}| = \frac{\sqrt{1 - \cos1}}{\pi\sqrt{2}}$  e  $\Psi_{-1} = \frac{1}{2}$ . In modo analogo, si ha  $\Psi_2 = -1$  e  $\Psi_{-2} = 1$ , poi  $\Psi_3 = -\frac{3}{2}$  e  $\Psi_{-3} = \frac{3}{2}$ , e

in generale  $\Psi_n = -\frac{n}{2}$ , ma solo se  $\frac{n}{2}$  è compreso tra  $-\pi$  e  $\pi$ , cioè per  $-6 \leq n \leq 6$ . Per valori di  $n$  al di

fuori di questo intervallo la situazione è più complicata; ad esempio, per  $n = 7$  è  $|c_7| = \frac{\sqrt{1 - \cos7}}{7\pi\sqrt{2}}$ ,

mentre  $\arg(c_7)$  deve soddisfare le due equazioni  $\cos\varphi = \frac{\operatorname{sen}7}{\sqrt{2(1 - \cos7)}}$  e  $\operatorname{sen}\varphi = -\sqrt{\frac{1 - \cos7}{2}}$ , per cui

$\Psi_7$  giace tra  $-\frac{\pi}{2}$  e 0. Ricordiamo ora che nell'uso delle formule di bisezione occorre tener conto del

quadrante in cui cade l'angolo  $\frac{\alpha}{2}$  per scegliere correttamente il segno; se calcoliamo  $\operatorname{sen}\frac{7}{2}$  partendo

da  $\cos 7$ , dobbiamo considerare che  $\frac{7}{2}$  è poco più grande di  $\pi$ , per cui  $\operatorname{sen}\frac{7}{2}$  è negativo. Abbiamo

allora  $\operatorname{sen}\frac{7}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos7}{2}}$ , per cui la seconda equazione del sistema si scrive  $\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\frac{7}{2}$ . Ma

siccome  $\frac{7}{2}$  giace nel terzo quadrante, anche il suo coseno è negativo, pertanto  $\frac{7}{2}$  non è soluzione

del sistema in questione. Il problema si risolve allora ricordando le formule degli angoli associati.

Se consideriamo l'angolo  $\frac{7}{2} - \pi$ , osserviamo che esso ha seno e coseno coincidenti con quelli di  $\frac{7}{2}$ ,

ma col segno cambiato (cioè entrambi positivi). Per ottenere allora l'angolo che soddisfa il sistema suddetto, basta allora considerare l'opposto di quest'angolo (che giace appunto tra  $-\frac{\pi}{2}$  e 0),

cosicché otteniamo  $\Psi_7 = \pi - \frac{7}{2}$ , e per simmetria  $\Psi_{-7} = \frac{7}{2} - \pi$ . Ragionando in modo analogo

troviamo  $\Psi_8 = \pi - 4$  e  $\Psi_{-8} = 4 - \pi$ ,  $\Psi_9 = \pi - \frac{9}{2}$  e  $\Psi_{-9} = \frac{9}{2} - \pi$ , e così via fino a  $\Psi_{12} = \pi - 6$  e

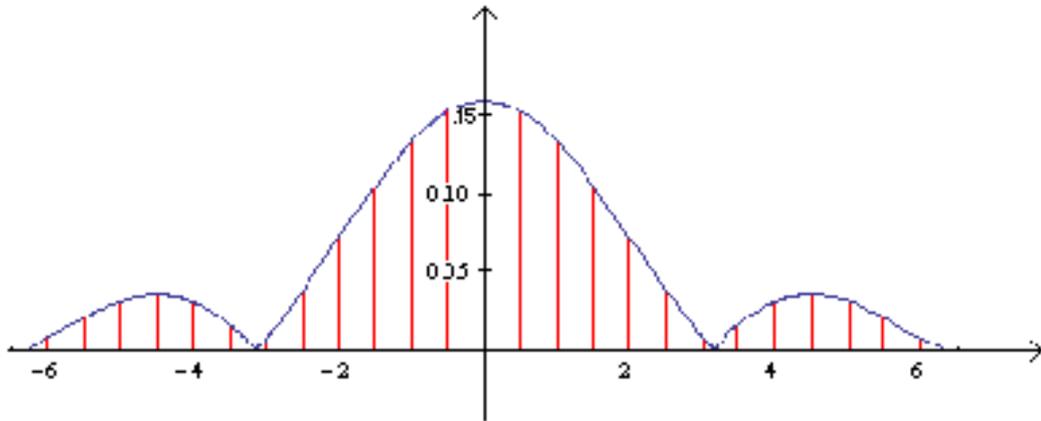
$\Psi_{-12} = 6 - \pi$ . Osservando poi che  $\frac{13}{2}$  è poco più di  $2\pi$ , otteniamo  $\Psi_{13} = 2\pi - \frac{13}{2}$  e  $\Psi_{-13} = \frac{13}{2} - 2\pi$ ,

poi  $\Psi_{14} = 2\pi - 7$  e  $\Psi_{-14} = 7 - 2\pi$ , e così via.

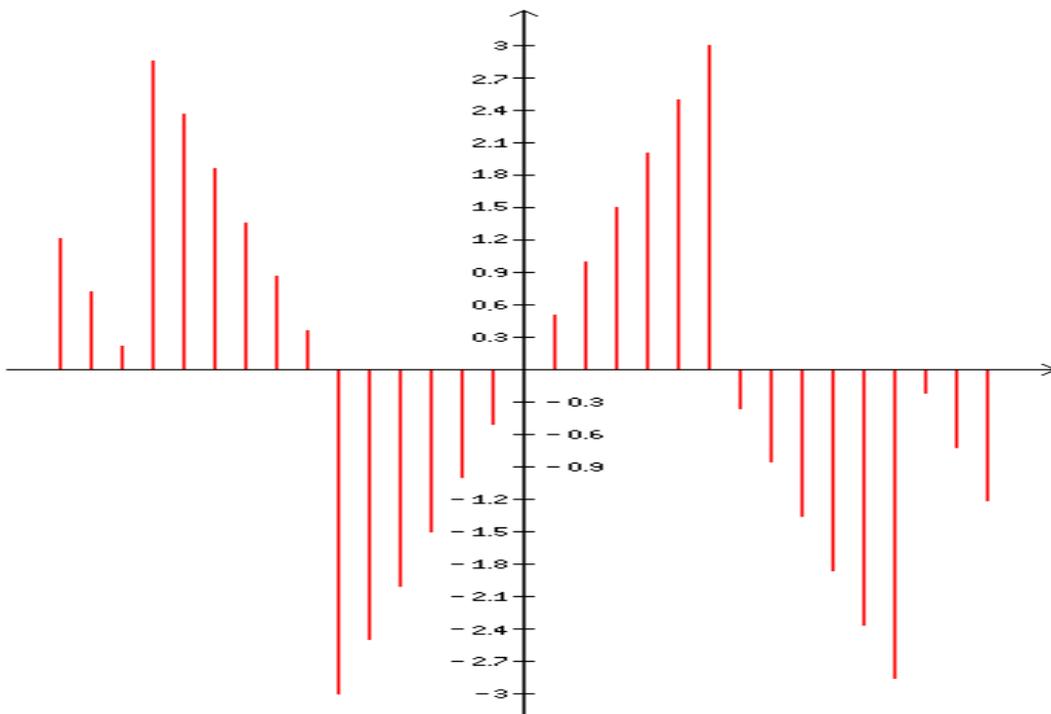
Ora tracciamo i grafici dello spettro di ampiezza e dello spettro di fase per il segnale considerato. Osserviamo che si può scrivere  $|c_n|^2 = \frac{1 - \cos n}{2\pi^2 n^2}$ ; essendo però  $\frac{1 - \cos n}{2} = \text{sen}^2 \frac{n}{2}$ , si ha

$$|c_n|^2 = \frac{\text{sen}^2 \frac{n}{2}}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\text{sen}^2 \frac{n}{2}}{\frac{n^2}{4}}, \text{ da cui } |c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\text{sen} \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \right|. \text{ Allora i valori dello spettro di ampiezza si}$$

ottengono tracciando il grafico della funzione  $\frac{1}{2\pi} \left| \frac{\text{sen} x}{x} \right|$  e considerando i valori di tale funzione per  $x$  uguale ad un numero intero o alla metà di un numero intero dispari:



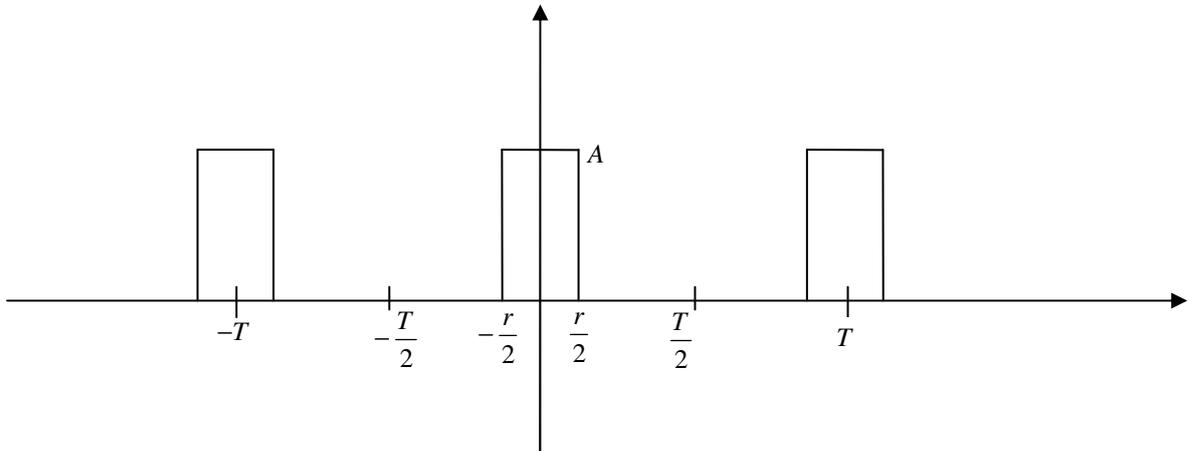
Per quanto riguarda invece lo spettro di fase, si ha il seguente grafico:



Vediamo un altro esempio. Sia  $x(t)$  il segnale di periodo  $T$  definito in  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  come

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{per } -\frac{r}{2} < t < \frac{r}{2} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

con  $r$  fissato tra 0 e  $T$ . Abbiamo quindi il seguente grafico:



Scriviamo la serie di Fourier relativa al segnale considerato. Abbiamo intanto

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} A dt = \frac{Ar}{T}; \text{ inoltre, per ogni } n \text{ intero non nullo è:}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} A e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \left[ \frac{e^{-in\omega_0 t}}{-in\omega_0} \right]_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} = -\frac{A}{Tni\omega_0} \left( e^{-in\omega_0 \frac{r}{2}} - e^{in\omega_0 \frac{r}{2}} \right) = \\ &= \frac{2A}{Tn\omega_0} \cdot \frac{e^{in\omega_0 \frac{r}{2}} - e^{-in\omega_0 \frac{r}{2}}}{2i} = \frac{Ar}{T} \cdot \frac{\text{sen} \left( n\omega_0 \frac{r}{2} \right)}{n\omega_0 \frac{r}{2}} = \frac{Ar}{T} \cdot \frac{\text{sen} \left( \frac{n\pi r}{T} \right)}{\frac{n\pi r}{T}}. \end{aligned}$$

In questo caso i coefficienti  $c_n$  sono tutti reali (come era prevedibile, in quanto essendo  $x(t)$

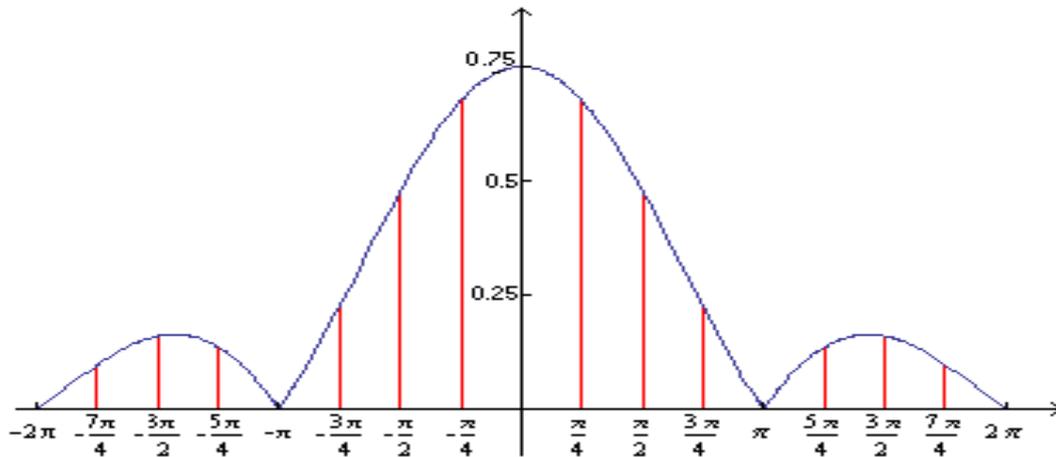
pari si ottiene una serie di soli coseni). Oltre a  $|c_0| = \frac{Ar}{T}$ , si ha  $|c_n| = \frac{Ar}{T} \cdot \left| \frac{\text{sen} \frac{n\pi r}{T}}{\frac{n\pi r}{T}} \right|$ , perciò i valori

dello spettro di ampiezza coincidono con quelli assunti dalla funzione  $\frac{Ar}{T} \left| \frac{\text{sen} x}{x} \right|$  nei punti 0,

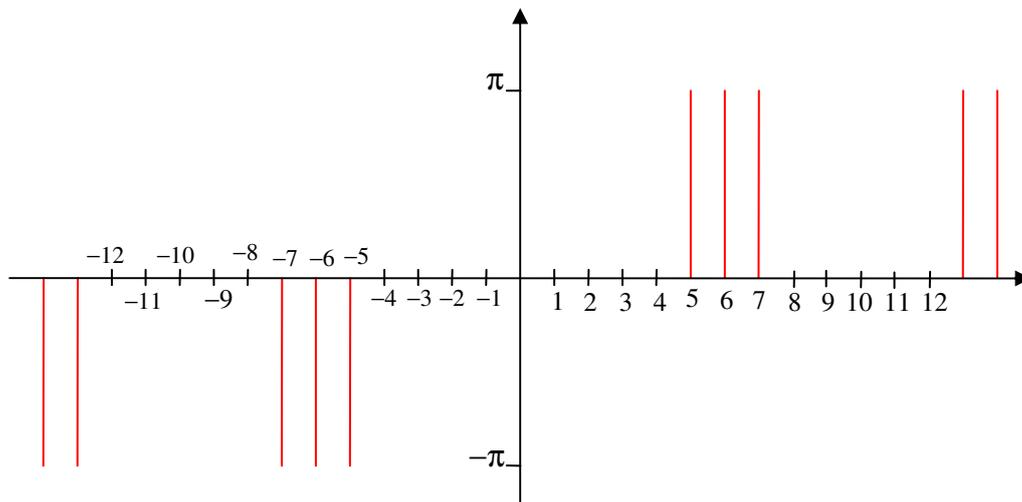
$\pm \frac{\pi r}{T}, \pm \frac{2\pi r}{T}, \pm \frac{3\pi r}{T}, \dots$  (si può ritenere questa formula valida anche per  $n=0$ , sottintendendo

l'eliminazione della discontinuità della funzione  $\frac{\text{sen} x}{x}$ ). Il grafico che segue mostra lo spettro di

ampiezza nel caso particolare  $T=4, r=1, A=3$  (per cui è  $c_0 = \frac{3}{4}$  e  $c_n = \frac{3}{4} \cdot \frac{\text{sen} \frac{n\pi}{4}}{\frac{n\pi}{4}}$ ).



Per quanto riguarda lo spettro di fase, osserviamo che essendo tutti i  $c_n$  reali, abbiamo solo le seguenti possibilità:  $\Psi_n = 0$  per  $c_n$  reale positivo,  $\Psi_n = \pi$  per  $c_n$  reale negativo. Il caso  $c_n > 0$  non dà alcun particolare problema; invece nel caso  $c_n < 0$ , essendo il coniugato di un numero reale coincidente col numero stesso, dovrebbe essere anche  $\Psi_{-n} = \pi$ , ma in tal modo verrebbe a mancare per lo spettro di fase la proprietà di disparità detta prima. Stabiliamo allora la seguente convenzione: se per un  $n$  è  $c_n$  reale negativo (quindi  $\Psi_n = \pi$ ), poniamo anche  $\Psi_{-n} = -\pi$ ; come già osservato, questo significa semplicemente scegliere una diversa determinazione dell'argomento. Se ad esempio poniamo ancora  $T = 4$ ,  $r = 1$ ,  $A = 3$ , per determinare lo spettro di fase consideriamo che sul semiasse positivo la funzione  $\frac{\text{sen}x}{x}$  è positiva negli intervalli  $(0, \pi)$ ,  $(2\pi, 3\pi)$ ,  $(4\pi, 5\pi)$ , ecc., ed essendo una funzione pari sarà positiva anche in  $(-\pi, 0)$ ,  $(-3\pi, -2\pi)$ ,  $(-5\pi, -4\pi)$ , ecc., perciò avremo  $c_n > 0$  per  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \pm 17, \pm 18, \pm 19$ , cioè per  $n = \pm k$ , dove  $k \equiv 1, 2$ , oppure  $3 \pmod{8}$ . Sarà invece  $c_n < 0$  per  $n = \pm k$ , dove  $k \equiv 5, 6$ , oppure  $7 \pmod{8}$ , ed infine si avrà  $c_n = 0$  se  $n$  è divisibile per 4. Di conseguenza, si ha il seguente grafico:



## 5. CENNI SULLA TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI

Indichiamo con  $\mathcal{E}_0^\infty(\mathbb{R})$  lo spazio costituito da tutte le funzioni derivabili infinite volte su  $\mathbb{R}$ , ma "a supporto compatto", cioè in pratica nulle al di fuori di un intervallo chiuso e limitato<sup>(12)</sup>. Può

<sup>12</sup> Per maggiore precisione, occorre dire che nella retta un insieme **compatto** è un qualunque insieme chiuso e limitato, dove per "chiuso" intendiamo un insieme il cui complementare è un aperto. Ovviamente semplici esempi di compatti

sembrare strano a prima vista che una funzione nulla al di fuori di un certo intervallo possa essere infinitamente derivabile senza essere ovunque nulla, ma in realtà è possibile costruire tali esempi, come la funzione che segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{per } |x| < 1 \\ 0 & \text{per } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

La funzione (1.1) è definita con due diverse espressioni nei due insiemi  $A = (-1, 1)$  e  $B = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ; ora, si può vedere che  $-1$  ed  $1$  non sono punti angolosi per la  $f$ : infatti l'arco di curva esponenziale si "raccomoda" talmente bene all'asse delle  $x$  da garantire l'esistenza di *tutte* le derivate di  $f$  in tali punti. Consideriamo infatti il solo punto  $x = 1$  (per simmetria lo stesso risultato sarà valido in  $-1$ ). Ovviamente è  $f^{(k)}(x) = 0$  per ogni  $x$  in  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . In  $(-1, 1)$  si avrà invece  $f'(x) = -\frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ ; è facile osservare che, nonostante la presenza del termine  $(1-x^2)^2$  al denominatore, il limite per  $x \rightarrow 1^-$  di tale espressione è  $0$ , poiché lo zero cui tende l'esponenziale è di ordine superiore rispetto all'infinito che si ottiene dal limite di  $-\frac{2x}{(1-x^2)^2}$ . Lo stesso accade per le derivate di qualsiasi ordine, per cui abbiamo  $f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0$  per ogni  $k$ , pertanto  $f$  ha derivata di qualsiasi ordine in tutto  $\mathbb{R}$ .

Siccome  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  è uno spazio vettoriale sul campo dei reali, possiamo definire dei **funzionali lineari** su tale spazio: in generale, si dirà **funzionale** una qualsiasi "regola" che ad ogni funzione scelta in un opportuno insieme (nel nostro caso appunto  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ ) fa corrispondere un numero reale. Se l'insieme di funzioni considerato è uno spazio vettoriale, diciamo che un funzionale  $L$  è lineare se, comunque si considerino le funzioni  $f$  e  $g$  e i numeri  $\alpha$  e  $\beta$ , si ha

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g). \quad (5.2)$$

Un semplice esempio di funzionale lineare si può dare come segue: sia  $C$  lo spazio di tutte le funzioni continue sull'intervallo  $[0, 1]$ , e si ponga  $L(f)$  uguale all'integrale di  $f$  su  $[0, 1]$ . Non solo  $L$  è definito per ogni  $f$  in  $C$ , ma si nota anche che esso è un funzionale lineare, perché per ogni  $f \in C$  si

$$\text{ha } \int_0^1 (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_0^1 f(x) dx + \beta \int_0^1 g(x) dx.$$

Prima di dare la definizione di distribuzione, occorre definire in modo soddisfacente cosa si intende per funzionale **continuo**. Intuitivamente, una funzione si dice continua in un certo punto  $x_0$  se per ogni  $x$  "vicino" ad  $x_0$  i valori della funzione sono "vicini" ad  $f(x_0)$ ; questa considerazione intuitiva viene poi formalizzata in termini di intorni (spesso utilizzando i noti simboli  $\delta$  ed  $\epsilon$ ). Per definire un funzionale continuo possiamo procedere in modo simile, ma per fare questo occorre prima definire il concetto di "funzioni vicine tra di loro", il che si può fare modi diversi.

sono gli intervalli chiusi e limitati (compresi i singoli punti) e le unioni finite di tali intervalli, alcuni dei quali eventualmente si riducono a singoli punti. Perciò ad esempio gli insiemi  $A = [0, 2]$ ,  $B = \{4\}$ ,  $C = [-1, 1] \cup [4, 13]$ ,  $D = \{-1\} \cup \{0\} \cup [6, 7]$  sono compatti. Esistono però esempi meno intuitivi di compatti, che non si possono decomporre in un numero finito di intervalli chiusi e limitati (un celebre esempio è l'*insieme di Cantor*). Si dice **supporto** di una funzione la chiusura dell'insieme dei punti in cui  $f$  è non nulla, cioè il più piccolo insieme chiuso contenente l'insieme dei punti in cui  $f(x) \neq 0$ . Ad esempio, il supporto della funzione  $f(x) = x^2 - 1$  è tutto  $\mathbb{R}$ , in quanto l'insieme dei punti in cui  $f$  non è nulla è  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ , e il più piccolo chiuso contenente tale insieme è tutto  $\mathbb{R}$ . Se invece consideriamo la funzione  $f(x)$  che vale  $0$  per  $x \leq -1$  e per  $x \geq 1$ , e che inoltre vale  $x + 1$  nell'intervallo  $(-1, 0)$  e  $1 - x$  in  $(0, 1)$ , l'insieme dei punti in cui essa è non nulla è  $(-1, 1)$ , pertanto il supporto è  $[-1, 1]$ .

Per definire nello spazio  $\mathcal{E}_0^\infty(\mathbb{R})$  cosa si intende per funzioni "vicine", procediamo in questo modo: diciamo che una successione  $\{\varphi_n\}$  converge alla funzione  $\varphi$  (anch'essa appartenente a  $\mathcal{E}_0^\infty(\mathbb{R})$ ) se per qualunque  $k \in \mathbb{N}_0$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x) - \varphi_n^{(k)}(x)| \right) = 0, \quad (5.3)$$

il che implica che per ogni  $k$  la successione  $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$  converge uniformemente a  $\varphi^{(k)}(x)$  su tutto  $\mathbb{R}$ .

Possiamo ora dare la definizione di distribuzione.

**Definizione.** Si dice **distribuzione** un funzionale lineare e continuo definito sullo spazio  $\mathcal{E}_0^\infty(\mathbb{R})$ , secondo la definizione di convergenza data sopra. Perciò, un funzionale  $T$  definito su  $\mathcal{E}_0^\infty(\mathbb{R})$  è una distribuzione se:

- 1) è lineare;
- 2) comunque si consideri una successione di funzioni  $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{E}_0^\infty(\mathbb{R})$  convergente ad una funzione  $\varphi$  secondo la definizione di convergenza data dalla (5.3), si abbia  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$ .

Si può anche utilizzare la scrittura  $\langle T, \varphi \rangle$  al posto di  $T(\varphi)$ .

Come esempio, vediamo come si può definire una distribuzione associata ad una data funzione. Sia  $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ , dove  $L_{\text{loc}}^1(I)$  indica l'insieme delle funzioni "localmente sommabili" su  $I$ , cioè tali che l'integrale su un qualsiasi intervallo chiuso e limitato contenuto in  $I$  esista finito (un caso particolare di funzione di  $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  è dato da una qualsiasi funzione continua in  $\mathbb{R}$ : anche se l'integrale di  $f$  su tutto  $\mathbb{R}$  può non convergere, fissando un intervallo limitato si ha un integrale senz'altro finito). Definiamo allora il funzionale  $T_f$  (il pedice  $f$  indica appunto che il funzionale  $T$  dipende dalla fissata  $f$ ) come segue:

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx. \quad (5.4)$$

Ovviamente  $T_f$  è lineare; inoltre,  $T_f(\varphi_n)$  è uguale a  $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)dx$ , che per  $n \rightarrow \infty$  converge a  $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ , grazie all'ipotesi di convergenza uniforme.

Perciò ad esempio se fissiamo  $f(x) = x^2$  per ogni  $x$  reale, avremo per ogni  $\varphi \in \mathcal{E}_0^\infty(\mathbb{R})$   $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} x^2\varphi(x)dx$  (è senz'altro un numero finito, perché la funzione integranda è diversa da zero solo in un compatto). Una definizione analoga va bene anche per le funzioni limitate che presentino ad esempio un numero finito di discontinuità di salto: un classico esempio è la **funzione di Heaviside**, detta anche *funzione gradino*, definita come  $H(0) = 0$  per  $x < 0$ ,  $H(x) = 1$  per  $x \geq 0$ . La distribuzione  $T_H$  associata a tale funzione dà per ogni  $\varphi \in \mathcal{E}_0^\infty(\mathbb{R})$   $T_H(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$ . Si può anche scegliere una funzione  $f$  illimitata, purché avente integrale finito in qualsiasi intervallo chiuso e

limitato: ad esempio, posto  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  (per  $x = 0$  si può assegnare alla funzione un valore

qualsiasi, visto che questo non influisce sull'integrale), si avrà  $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{\sqrt[3]{x}} dx$ .

Le distribuzioni associate a funzioni secondo quanto detto sopra si dicono **regolari**. in un certo senso, si può "identificare" la distribuzione  $T = T_f$  con la funzione  $f$  (infatti si usa scrivere  $T(x)$ , sebbene a rigore questo simbolo sia da ritenersi improprio).

## 6. LA DELTA DI DIRAC

In base a quanto detto alla fine del paragrafo precedente, ci si può chiedere ora se tutte le distribuzioni siano regolari, cioè se per ogni distribuzione  $T$  esista una funzione  $f$  localmente sommabile per la quale valga la (6.4). La risposta a tale domanda è negativa, in quanto non tutte le distribuzioni sono regolari, come si vede osservando il noto esempio della **delta di Dirac**.

La delta di Dirac è definita per ogni  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  come segue:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0); \quad (6.1)$$

perciò il funzionale  $\delta$ , applicato ad una generica funzione test  $\varphi$ , non fa altro che restituire il valore della funzione  $\varphi$  nel punto  $x = 0$ . Ebbene, si dimostra che *non può esistere* una funzione  $k(x)$  associata alla  $\delta$  di Dirac nel senso detto sopra: non esiste cioè una funzione  $k$  per la quale vale l'uguaglianza  $\int_{\mathbb{R}} k(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$  per tutte le funzioni test  $\varphi$ .

Nonostante il fatto che non esista la  $\delta$  intesa come funzione, tuttavia spesso nelle applicazioni si incontrano simboli come  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx$ , oppure  $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)dx$ . Tali simboli, comunemente utilizzati semplicemente per la comodità della notazione integrale, vanno intesi come un'integrazione solo "formale", che dà il valore  $\varphi(0)$ .

Intuitivamente, si può immaginare la  $\delta$  di Dirac come una funzione nulla per  $x \neq 0$  e infinita per  $x = 0$ , un infinito di ordine "abbastanza alto" da ottenere come integrale  $\varphi(0)$ . La  $\delta$  di Dirac viene utilizzata per rappresentare approssimativamente fenomeni come i picchi alti e stretti di alcune funzioni o le loro discontinuità: in questo senso, è la stessa astrazione che si fa quando si considera una "carica puntiforme" (concentrata in un punto di dimensioni nulle), oppure un "punto materiale pesante", cioè un corpo di dimensioni nulle in cui è concentrata una massa non nulla.

Anche se la notazione integrale appena vista è in un certo senso un "abuso di linguaggio" (visto che non si tratta di una vera e propria integrazione), è possibile tuttavia dimostrare alcune proprietà formali che ci consentono di maneggiare tale notazione.

**Prodotto della  $\delta$  per un numero.** Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ha senso scrivere  $\alpha \cdot \delta$ ; questa è la distribuzione che per ogni funzione test  $\varphi$  dà  $\alpha\varphi(0)$ . Con la notazione integrale, abbiamo l'identità  $\int_{\mathbb{R}} \alpha\delta(x)\varphi(x)dx = \alpha \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)dx$ .

**Prodotto della  $\delta$  per una funzione.** Il risultato precedente può essere generalizzato considerando il prodotto della delta di Dirac per una generica funzione  $\alpha(x)$  di classe  $\mathcal{C}^\infty$  in  $\mathbb{R}$ . Consideriamo l'integrale  $\int_{\mathbb{R}} (\alpha(x)\delta(x))\varphi(x)dx$ , che si può anche scrivere  $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)(\alpha(x)\varphi(x))dx$ , dove

come al solito  $\varphi$  è una generica funzione test. Ora, essendo  $\alpha$  di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , il prodotto  $\alpha\varphi$  è una funzione test, quindi l'ultimo integrale vale  $\alpha(0)\varphi(0)$ . Ma questo è anche il valore di  $\int_{\mathbb{R}} (\alpha(0)\delta(x))\varphi(x)dx$ , per cui abbiamo l'uguaglianza  $\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x)$ .

**Traslazione.** In generale, si ottiene la traslazione di una funzione  $f$  scrivendo  $f(x - x_0)$ , con  $x_0$  fissato. Ad esempio, se  $a$  è un numero positivo,  $f(x - a)$  dà per ogni  $x$  (scelto in un opportuno dominio) il valore che la funzione data  $f$  assume in  $x - a$ : da un punto di vista grafico, si ottiene la stessa curva, traslata a destra di un segmento di lunghezza  $a$ . In maniera analoga, possiamo considerare la distribuzione  $\delta(x - x_0)$ : mentre la  $\delta(x)$  "sceglie" il valore  $\varphi(0)$  per ogni funzione test  $\varphi$ , la distribuzione traslata  $\delta(x - x_0)$  dà come risultato  $\varphi(x_0)$ . Con la notazione integrale, si ha la formula  $\int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0)\varphi(x)dx = \varphi(x_0)$ .

Avendo dato un significato al simbolo  $\delta(x - x_0)$ , possiamo considerare il prodotto tra questa "delta traslata" ed una generica funzione  $\alpha(x)$  di classe  $\mathcal{C}^\infty$  in  $\mathbb{R}$ . Ripetendo lo stesso calcolo già eseguito prima, otteniamo in questo caso la formula  $\alpha(x)\delta(x - x_0) = \alpha(x_0)\delta(x - x_0)$ .

**Riscaldamento e parità.** Dato un ordinario integrale di funzione di una variabile, diciamo  $\int_a^b f(x)dx$ , esso si può sempre scrivere come  $\frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$ , dove  $k$  è un numero reale non nullo. Il termine "riscaldamento" sta appunto ad indicare che si "modifica la scala" sull'asse delle  $x$ , nel senso che si dilatano o si contraggono le misure dei segmenti su tale asse, secondo la costante  $k$ . Se poi si considera  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  (ammesso che tale integrale sia convergente), l'intervallo di integrazione

rimane ancora tutto  $\mathbb{R}$ , per cui si avrà  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$  per  $k > 0$  (invece per  $k < 0$  sarà

necessario scambiare gli estremi di integrazione). Vediamo allora come si traduce questa proprietà di riscaldamento sulla distribuzione  $\delta$ . Per  $k$  costante non nulla, consideriamo l'integrale

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(kx)\varphi(x)dx$ ; immaginando di poter eseguire "formalmente" le stesse operazioni che facciamo

sugli integrali, poniamo  $x = \frac{t}{k}$ , da cui  $dx = \frac{dt}{k}$ . Per  $k > 0$  gli estremi rimangono gli stessi, perciò

l'integrale diventa  $\frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)dt$ , mentre per  $k < 0$  abbiamo  $-\frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)dt$ . In ogni caso

possiamo scrivere  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(kx)\varphi(x)dx = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)dt$ , che ovviamente è uguale a  $\frac{\varphi(0)}{|k|}$ . Abbiamo

quindi  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(kx)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|k|} \delta(x)\varphi(x)dx$ , il che ci consente di scrivere l'uguaglianza

$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x)$ . In particolare, per  $k = -1$ , otteniamo  $\delta(-x) = \delta(x)$ : in questo senso la  $\delta$  si può

immaginare come una funzione pari, il che concorda con quanto detto prima sull'interpretazione "intuitiva" di  $\delta$  come funzione.

## 7. DERIVATA DI UNA DISTRIBUZIONE

È interessante osservare che, al contrario di quanto accade per le ordinarie funzioni di una variabile, nello spazio delle distribuzioni è possibile definire un'operazione di derivazione, valida per qualunque distribuzione: in altre parole, ogni distribuzione è derivabile.

**Definizione.** Data una distribuzione  $T$ , si definisce *derivata* di  $T$  la distribuzione  $DT$  definita per ogni funzione test  $\varphi$  dalla formula

$$\langle DT, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle. \quad (7.1)$$

La definizione (7.1) è giustificata dal fatto che, se  $T$  è la distribuzione  $Tf$  associata ad una funzione  $f$  derivabile (nel senso usuale del termine), allora  $DT$  è anch'essa una distribuzione regolare, precisamente quella associata alla funzione  $f'$ . Infatti, se poniamo  $T'$  uguale alla distribuzione associata ad  $f'$ , abbiamo per ogni funzione test  $\varphi$ :

$$\langle T', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx. \quad (7.2)$$

Integrando per parti, la (4.2) diventa

$$\langle T', \varphi \rangle = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx, \quad (7.3)$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che  $[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty}$  è nullo in quanto  $\varphi$  è nulla al di fuori di un compatto. Avendo ottenuto il secondo membro della (7.1), concludiamo che in questo caso  $DT$  è uguale a  $T'$ .

Ma la (7.1) consente di definire la derivata per una qualsiasi distribuzione, anche se associata ad una funzione non derivabile, oppure se non è associata ad alcuna funzione. Ad esempio, si consideri la funzione  $f(x) = |x|$ , che come è noto rappresenta un semplice esempio di funzione continua su tutto  $\mathbb{R}$  ma non ovunque derivabile "nel senso classico". Alla funzione  $f$  possiamo far corrispondere la distribuzione  $T_f = T_{|x|}$  definita dalla (5.4), cioè:

$$T_{|x|}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} |x| \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} x\varphi(x)dx - \int_{-\infty}^0 x\varphi(x)dx.$$

Ora, se applichiamo la (7.1) abbiamo  $\langle DT_{|x|}, \varphi \rangle = -\langle T_{|x|}, \varphi' \rangle = \int_{-\infty}^0 x\varphi'(x)dx - \int_0^{+\infty} x\varphi'(x)dx$ ;

integrando per parti ciascuno dei due addendi, troviamo  $-\int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$ , che è come dire

$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(x)\varphi(x)dx$ , dove "sgn" indica la *funzione segno*, cioè la funzione che vale 1 per  $x$  positivo e  $-1$  per  $x$  negativo<sup>(13)</sup>; concludiamo che  $D|x| = \text{sgn}(x)$ , nel senso delle distribuzioni.

---

<sup>13</sup> In alcuni testi la funzione segno viene definita semplicemente come  $\frac{|x|}{x}$ , perciò vale 1 per  $x$  positivo,  $-1$  per  $x$  negativo, e non è definita in  $x = 0$ ; invece, altri testi definiscono  $\text{sgn}(x)$  anche in 0, ponendo  $\text{sgn}(0) = 0$ . Il risultato che

Allo stesso modo, calcoliamo la derivata della funzione di Heaviside  $H(x)$  definita nel par. 5. Stando alla definizione classica di derivata, la  $H$  è derivabile per  $x \neq 0$  (ed ha ivi derivata nulla), mentre non è derivabile in 0 in quanto discontinua. Se però applichiamo la (7.1) otteniamo, per ogni funzione test  $\varphi$ :

$$\langle DH, \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = \varphi(0), \quad (7.4)$$

il che vuol dire che la derivata della funzione gradino è la delta di Dirac.

Questo si accorda bene con il significato intuitivo di distribuzione  $\delta$  immaginata come funzione: infatti, se una funzione  $f$  è derivabile, abbiamo già visto che la derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la derivata usuale. Consideriamo invece ad esempio la funzione gradino: essa presenta un salto in 0, perciò sappiamo dall'Analisi elementare che essa non può essere derivabile (se proviamo a scrivere il rapporto incrementale in  $x_0 = 0$ , vediamo che il limite di tale rapporto per  $h \rightarrow 0$  è infinito). Ritroviamo così una derivata che è nulla per  $x \neq 0$  ed "ha un valore infinito" (nel senso intuitivo detto prima) per  $x = 0$ .

Vediamo come si ottiene con la stessa definizione la derivata della delta di Dirac; sempre in base alla (7.1), abbiamo per ogni funzione test:

$$\langle D\delta, \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0), \quad (7.5)$$

il che vuol dire che la distribuzione  $D\delta$  dà per ogni funzione test  $\varphi$  il valore  $-\varphi'(0)$ . Visto che l'uguaglianza (7.5) si può anche scrivere nella forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \delta(x) \varphi(x) dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx; \quad (7.6)$$

simbolicamente possiamo anche scrivere

$$\frac{d}{dx} \delta(x) = -\delta(x) \frac{d}{dx}. \quad (7.7)$$

Naturalmente, la (7.7) va intesa come identità tra funzionali: si sottintende cioè l'applicazione dei due membri ad una generica funzione test.

La (7.7) può essere generalizzata considerando le derivate successive della  $\delta$ , ottenendo così per ogni  $m$  intero l'identità formale:

$$\delta^{(m)}(x) = (-1)^m \delta(x) \frac{d^m}{dx^m}, \quad (7.8)$$

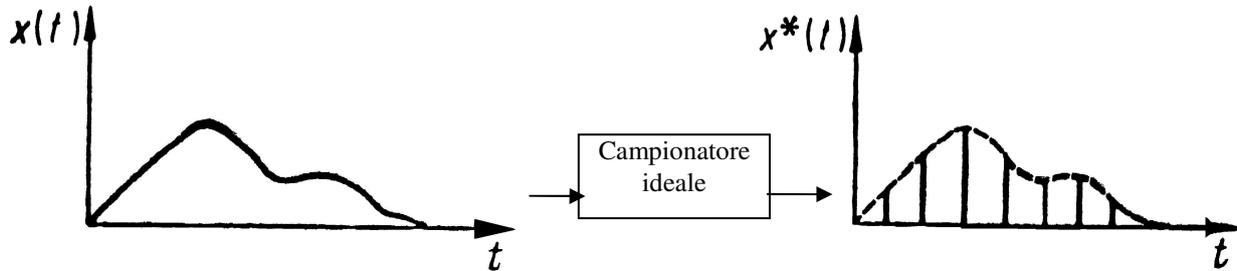
che va naturalmente interpretata in modo simile alla (7.7).

## 8. CAMPIONAMENTO DI SEGNALI E DELTA DI DIRAC

Vediamo ora come le considerazioni fatte prima sulle distribuzioni (ed in particolare sulla delta di Dirac) possono essere utilizzate per formalizzare il campionamento di un segnale.

abbiamo trovato qui in realtà non dipende dal valore che si assegna a  $\text{sgn}(0)$ , in quanto l'integrale non si modifica cambiando il valore della funzione integranda in un punto.

Consideriamo un *segnale analogico*, cioè una grandezza variabile nel tempo ed espressa come una funzione continua  $x(t)$ . Ora supponiamo di avere un dispositivo che *campiona* il segnale, cioè ne rileva la misura ad intervalli di tempo regolari. Ovviamente la misura avviene sempre in un certo tempo finito, tuttavia è comodo immaginare di disporre di un *campionatore ideale*, che esegue un campionamento "istantaneo"; ciò significa che in output si otterrà una funzione  $x^*(t)$  diversa da zero solo per alcuni istanti di tempo, ad intervalli regolari. La situazione è rappresentata dalla figura che segue.



Vediamo ora come possiamo esprimere la  $x^*(t)$  ottenuta dal campionatore ideale. In realtà, è facile intuire che ciò che si ottiene dal campionatore ideale non è esattamente una "funzione", bensì una distribuzione, precisamente una combinazione lineare di delta di Dirac.

Consideriamo per semplicità un intervallo di tempo pari ad un secondo, e quindi supponiamo che la funzione  $x(t)$  sia diversa da 0 solo nell'intervallo  $[0, 1]$ ; in questo intervallo vengono effettuati  $N$  campionamenti, precisamente negli istanti di tempo  $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t, \dots, t_{N-1} = (N-1)\Delta t$ , dove ovviamente  $\Delta t = \frac{1}{N}$ . Abbiamo quindi una *successione* finita di dati  $\{X_m\}$  ( $m = 0, 1, \dots, N-1$ ), dove  $X_m = x(m\Delta t)$ . Supponiamo ora di moltiplicare  $x(t)$  per una generica funzione test  $\varphi(t)$ , e consideriamo la somma

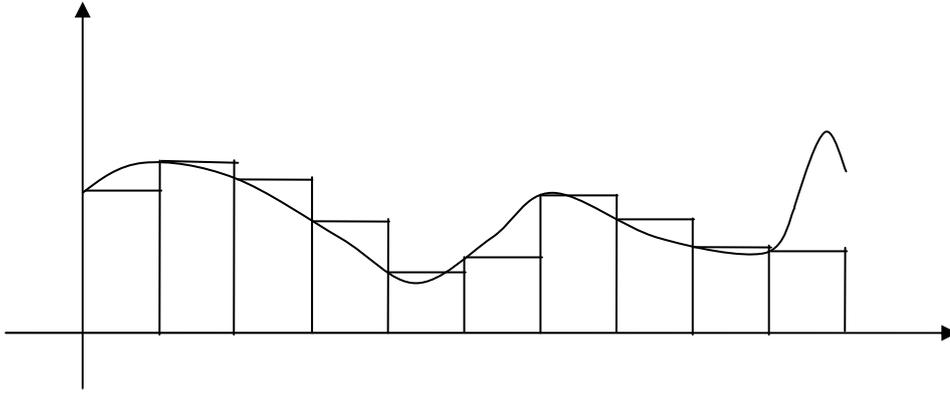
$$\Delta t \sum_{m=0}^{N-1} X_m \varphi(m\Delta t) = \Delta t \{x(0)\varphi(0) + x(\Delta t)\varphi(\Delta t) + \dots + x((N-1)\Delta t)\varphi((N-1)\Delta t)\}. \quad (8.1)$$

La (8.1) rappresenta un concetto ben noto dall'Analisi Matematica: si tratta infatti di una *somma integrale* relativa alla funzione  $x(t)\varphi(t)$  sull'intervallo  $[0, 1]$ . Se la funzione integranda è non negativa, la (8.1) ha un noto significato grafico: essa infatti esprime l'area di un particolare plurirettangolo relativo al sottografico della funzione,<sup>(14)</sup> come si vede dalla figura alla pagina seguente.

Ora, possiamo supporre che la (8.1) costituisca una buona approssimazione dell'integrale della funzione  $x(t)\varphi(t)$ , approssimazione che sarà tanto migliore quanto più è grande il numero  $N$ . Possiamo perciò scrivere

<sup>14</sup> Esistono in realtà svariati modi per costruire le somme integrali, modi che alla fine risultano equivalenti, perché portano alla stessa definizione di integrale, almeno per una funzione continua. In primo luogo, nella definizione di somma integrale non si richiede in generale che l'intervallo sia suddiviso in parti uguali. Inoltre, è possibile ad esempio scegliere per il  $k$ -esimo subintervallo  $I_k$  di ampiezza  $\Delta t_k$  il minimo assoluto  $m_k$  della funzione, oppure il massimo, e così si possono ottenere due diversi plurirettangoli  $R_1$  ed  $R_2$ , rispettivamente inscritto e circoscritto al sottografico della funzione. Oppure si può fissare per ciascun  $I_k$  un qualsiasi punto  $\xi_k$  e definire la somma integrale come  $\sum_{k=1}^N f(\xi_k)\Delta t_k$ .

Nel caso considerato qui, è stato scelto per ciascun subintervallo il valore che la funzione assume nel punto iniziale del subintervallo stesso, il che implica che il plurirettangolo non è in generale né inscritto né circoscritto al sottografico.



$$\int_0^1 x(t)\varphi(t)dt \cong \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} X_m \varphi(m\Delta t). \quad (8.2)$$

Applichiamo alla funzione  $\varphi$  la distribuzione  $\delta(t - m\Delta t)$ , cioè scriviamo  $\int_{\mathbb{R}} \delta(t - m\Delta t)\varphi(t)dt$ .

Procediamo quindi come visto nel par. 6: posto  $t - m\Delta t = u$ , questo integrale diventa  $\int_{\mathbb{R}} \delta(u)\varphi(u + m\Delta t)dt = \varphi(m\Delta t)$ . Moltiplicando per il numero  $X_m = x(m\Delta t)$ , abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} x(m\Delta t)\delta(t - m\Delta t)\varphi(t)dt = x(m\Delta t)\varphi(m\Delta t). \quad (8.3)$$

Se ora sommiamo i due membri della (8.3) per  $m = 0, 1, N - 1$  e moltiplichiamo per  $\Delta t$ , al primo membro otteniamo  $\Delta t \int_{\mathbb{R}} \sum_{m=0}^{N-1} x(m\Delta t)\delta(t - m\Delta t)\varphi(t)dt$ , mentre al secondo membro otteniamo

$\Delta t \sum_{m=0}^{N-1} X_m \varphi(m\Delta t)$ , che coincide con il secondo membro della (8.2). Considerando poi che la  $x(t)$  è

nulla al di fuori di  $[0, 1]$ , per cui  $\int_0^1 x(t)\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} x(t)\varphi(t)dt$ , la (8.2) diventa

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)\varphi(t)dt \cong \Delta t \int_{\mathbb{R}} \sum_{m=0}^{N-1} x(m\Delta t)\delta(t - m\Delta t)\varphi(t)dt, \quad (8.4)$$

il che significa che la  $x^*(t)$  ottenuta dal campionatore ideale si può approssimare con  $\Delta t \sum_{m=0}^{N-1} x(m\Delta t)\delta(t - m\Delta t)$ . Abbiamo in conclusione la stima

$$x^*(t) \cong \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} x(m\Delta t)\delta(t - m\Delta t), \quad (8.4)$$

sempre da intendersi come uguaglianza tra distribuzioni. Intuitivamente, possiamo dire di aver ottenuto dalla funzione  $x(t)$  una "funzione" che vale zero negli istanti di tempo non considerati dal campionatore, ed è "infinita" negli istanti considerati: essa in effetti è una combinazione lineare di delta di Dirac, opportunamente traslate.

## 9. LA TRASFORMATA DI FOURIER

Esistono in Analisi diverse operazioni su funzioni che danno come risultato una nuova funzione; un simile oggetto matematico viene indicato con il termine **operatore**. Un semplice esempio è l'operatore di derivazione: con la scrittura  $D \arctg x = \frac{1}{1+x^2}$  si intende dire che

l'operatore di derivazione  $D$  associa alla funzione  $\arctg x$  la sua derivata  $\frac{1}{1+x^2}$ ; dunque questa

uguaglianza, prima che in senso "numerico", va intesa come una regola che ad una funzione ne associa, cioè ne fa corrispondere, un'altra: l'operatore  $D$  prende in input una funzione  $f$ , scelta in un opportuno spazio, e dà come risultato un'altra funzione  $Df$ , che appartiene ad un altro spazio.

Di solito gli insiemi di funzioni in cui agiscono gli operatori sono *spazi vettoriali*, ad esempio, fissato un intervallo  $I$  dell'asse reale, si indica con il simbolo  $\mathcal{E}^1(I)$  l'insieme di tutte le funzioni derivabili con derivata continua in  $I$  (è immediato verificare che questo è uno spazio vettoriale). Ora, se calcoliamo la derivata di una funzione di  $\mathcal{E}^1(I)$ , otteniamo una funzione continua in  $I$  (in generale essa non sarà nuovamente derivabile). Se allora indichiamo con  $\mathcal{E}^0(I)$ , possiamo rappresentare schematicamente questo fatto con gli usuali simboli

$$\begin{array}{ccc} D: \mathcal{E}^1(I) & \rightarrow & \mathcal{E}^0(I) \\ f & \mapsto & Df = f'. \end{array} \quad (9.1)$$

Si osservi che l'operatore  $D$  è lineare, in quanto, prese due funzioni  $f$  e  $g$  in  $\mathcal{E}^1(I)$  e due costanti reali  $\alpha$  e  $\beta$ , si ha  $D(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot Df + \beta \cdot Dg$ .

Un altro strumento molto usato per definire operatori è l'integrale. Sappiamo che l'integrale definito di una funzione su un intervallo dà un numero, ma è possibile definire una funzione tramite un integrale, utilizzando ad esempio un intervallo di ampiezza variabile. Se ad esempio  $I$  è un intervallo della retta reale, e se  $a$  un fissato punto di  $I$ , possiamo definire su  $\mathcal{E}^0(I)$  un operatore  $L$  come segue:

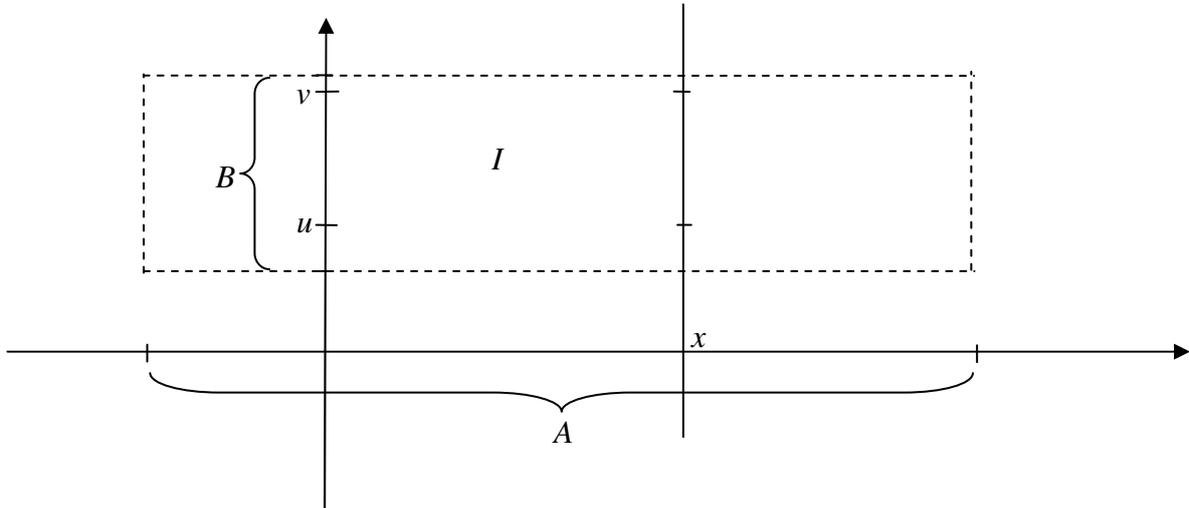
$$Lf(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (15), \quad (9.2)$$

ottenendo in tal modo una funzione di  $\mathcal{E}^1(I)$ ; si osservi che anche l'operatore  $L$  è lineare, grazie alle note proprietà dell'integrale.

---

<sup>15</sup> Per comprendere bene il simbolismo usato per dare questa definizione, si rifletta su quanto segue. Nell'esempio inerente alle derivate, abbiamo precisato che un'uguaglianza del tipo  $Df = g$  va intesa non tanto in senso numerico, ma come un'applicazione che ad una funzione ne fa corrispondere un'altra. Ora, nella (9.2) abbiamo scritto  $Lf(x) = \dots$ , il che può far pensare ad un'uguaglianza tra numeri. Ciò è vero se si immagina di aver fissato un particolare  $x$  in  $I$ , ma in realtà la (9.2) va intesa in modo analogo a quanto detto prima sulla derivata intesa come operatore: presa la funzione  $f$  continua in  $I$ , l'operatore  $L$  restituisce una nuova funzione  $Lf$  derivabile con derivata continua in  $I$ , che in effetti è  $\int_a^x f(t) dt$ . Abbiamo scritto  $Lf(x)$  semplicemente per dare la definizione della funzione  $Lf$  per un generico  $x \in I$ , ma non deve sfuggire il fatto che l'operatore  $L$  dà una funzione, e non un numero. Si osservi inoltre che il codominio dell'operatore  $L$  non è tutto lo spazio  $\mathcal{E}^1(I)$ , ma il suo sottoinsieme costituito dalle funzioni derivabili con derivata continua che si annullano per  $x = a$  (il lettore verifichi che questo insieme è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{E}^1(I)$ ).

Ovviamente un'equazione come la (9.2) non è l'unico modo possibile di definire un operatore tramite un integrale. possiamo definire ad esempio un altro procedimento come segue. Sia  $f(x, y)$  una funzione continua in un opportuno "rettangolo aperto" di  $\mathbb{R}^2$ , cioè in un insieme  $I$  dato dal prodotto cartesiano di due intervalli aperti  $A$  e  $B$  (volendo anche illimitati, il che significa che  $I$  potrebbe anche essere un angolo retto, una striscia, un semipiano, o anche tutto  $\mathbb{R}^2$ ). Ora, fissiamo in  $B$  due valori, diciamo  $u$  e  $v$ , quindi prendiamo un generico  $x$  in  $A$  e consideriamo l'integrale



$$\Phi(x) = \int_u^v f(x, y) dy. \quad (9.3)$$

Il lettore osservi che nella (9.3) si è scritto  $\Phi(x)$ : infatti l'integrale in questione è calcolato rispetto alla variabile di integrazione  $y$ , il che vuol dire che effettuando il calcolo la  $y$  scompare, ma rimane la dipendenza da  $x$ <sup>(16)</sup>. Si noti che anche l'operatore che ad  $f$  fa corrispondere  $\Phi$  è lineare.

Come esempio, poniamo  $A = B = (-1, 1)$ , e consideriamo la funzione  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ .

Fissiamo ora gli estremi di integrazione  $u = -\frac{1}{2}$  e  $v = \frac{1}{2}$  e scriviamo

$$\Phi(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}} dy. \quad (9.4)$$

Per dare l'espressione esplicita di  $\Phi(x)$  calcoliamo l'integrale in questione; supponendo per il momento che sia  $x \neq 0$ , poniamo  $y = \frac{\sin u}{x}$  con  $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ , cosicché l'integrale diventa  $\Phi(x) =$

$$= \int_{-\arcsen \frac{x}{2}}^{\arcsen \frac{x}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} du = \frac{1}{x} \int_{-\arcsen \frac{x}{2}}^{\arcsen \frac{x}{2}} du = \frac{2}{x} \arcsen \frac{x}{2}. \text{ Per } x = 0 \text{ si ha direttamente } \Phi(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-0}} dy = 1,$$

che d'altra parte coincide con il limite di  $\frac{2}{x} \arcsen \frac{x}{2}$  per  $x \rightarrow 0$ . Perciò possiamo scrivere

<sup>16</sup> Più esattamente, dovremmo scrivere  $\Phi(x, u, v)$  per evidenziare la dipendenza di  $\Phi$  anche da  $u$  e da  $v$ , ma possiamo farne a meno se intendiamo  $u$  e  $v$  fissati.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} \arcsen \frac{x}{2} & \text{per } x \in (-1, 1) - \{0\} \\ 1 & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

oppure più semplicemente  $\Phi(x) = \frac{2}{x} \arcsen \frac{x}{2}$ , sottintendendo l'eliminazione della discontinuità in 0.

Ora si consideri una funzione  $x(t)$  definita su tutto  $\mathbb{R}$  ed ivi sommabile. Consideriamo quindi l'integrale

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (9.5)$$

Analogamente, a quanto visto negli esempi precedenti, possiamo dire che l'operazione indicata nella (9.5) associa ad una funzione  $x$  un'altra funzione  $F_x$  (qui è stata evidenziata la dipendenza di  $F$  dalla  $x$  data, il che equivale a considerare un operatore  $L$  e ad indicare con  $Lf$  la funzione ottenuta applicandolo ad una generica  $f$ ). Si osservi che in questo caso otteniamo una funzione  $F_x$  in generale a valori complessi (ma la variabile  $\omega$  si intende comunque reale). Più esattamente, se  $x(t)$  è a valori solo reali, la (9.5) diventa

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sen \omega t dt, \quad (9.6)$$

dove ovviamente i due integrali sono convergenti, grazie all'ipotesi di sommabilità di  $x$ . Se poi  $x(t)$  è una funzione a valori complessi, diciamo  $x(t) = r(t) + is(t)$ , la (9.5) diventa

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (r(t) \cos \omega t + s(t) \sen \omega t) dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} (s(t) \cos \omega t - r(t) \sen \omega t) dt, \quad (9.7)$$

cosicché anche in questo caso ci siamo ricondotti al calcolo di due integrali di funzioni reali.

Dunque abbiamo definito un operatore che prende in input una certa funzione  $x(t)$  e dà in output una nuova funzione  $F_x(\omega)$ ; si può anche dire che  $F$  "trasforma" la funzione  $x$  in un'altra. Indichiamo  $F_x(\omega)$  con il termine "**trasformata di Fourier**" della data funzione  $x$ . Spesso si indica la trasformata di Fourier della funzione  $x(t)$  con il simbolo  $\hat{x}(\omega)$ .

Per dare un semplice esempio di applicazione della (9.5), consideriamo la funzione  $x(t)$  definita come segue:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases} \quad (9.8)$$

dove  $T$  è una costante positiva fissata. Applicando la (9.5), abbiamo:

---

<sup>17</sup> Adottiamo qui questa definizione perché comunemente usata nella teoria dei segnali; occorre avvertire però che in alcuni casi si danno definizioni leggermente diverse, in cui l'integrale (10.5) viene diviso per  $\sqrt{2\pi}$  oppure per  $2\pi$ . In questi casi è necessario modificare alcune delle formule successive, ad esempio quella della trasformata inversa.

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t} dt = \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{e^{i\omega \frac{T}{2}} - e^{-i\omega \frac{T}{2}}}{i\omega} = 2 \frac{\text{sen} \frac{\omega T}{2}}{\omega},$$

ovviamente con l'intesa che sia  $F_x(0) = T$ . In particolare, si avrà  $F_x(\omega) = 2 \frac{\text{sen} \omega}{\omega}$  se  $x(t)$  vale 1 solo nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

Vediamo di seguito alcune importanti proprietà della trasformata di Fourier.

- *Linearità.* La trasformata di Fourier è un operatore **lineare**; questo si vede molto facilmente dalla definizione, in quanto se  $f$  e  $g$  sono due funzioni sommabili su  $\mathbb{R}$ , e se  $h$  indica la funzione  $\alpha f + \beta g$ , si ha  $\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-i\omega t} dt = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt$ .
- *Proprietà di traslazione.* Sia  $f$  al solito una funzione sommabile in  $\mathbb{R}$ . Se indichiamo con  $g$  la funzione traslata, diciamo  $g(t) = f(t - \alpha)$ , allora la trasformata di Fourier di  $g$  è data dalla formula  $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)e^{-i\alpha\omega}$ . Cioè, la traslazione della funzione dà come risultato la moltiplicazione della trasformata per un opportuno esponenziale. Infatti si ha  $\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \alpha)e^{-i\omega t} dt$ ; con la sostituzione  $t = u + \alpha$  questo integrale diventa  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega(u+\alpha)} du = e^{-i\omega\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega u} du$ . Vale anche il viceversa: se  $g(t) = f(t)e^{i\alpha t}$ , allora si ha  $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \alpha)$ .
- *Simmetrie.* Data  $f$  sommabile in  $\mathbb{R}$ , si definisca  $g(t) = f(-t)$ ; allora si ha anche  $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(-\omega)$ . Infatti risulta  $\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)e^{-i\omega t} dt$ ; con la sostituzione  $t = -u$ , questo integrale diventa  $\int_{+\infty}^{-\infty} f(u)e^{i\omega u} (-1) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i(-\omega)u} du$ . Se invece si suppone di considerare funzioni a valori complessi e si definisce  $g(t) = \overline{f(-t)}$ , si trova  $\hat{g}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}$ . Sia infatti  $f(t) = r(t) + is(t)$ , da cui  $g(t) = \overline{r(-t) + is(-t)} = r(-t) - is(-t)$ . Si ha allora

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (r(-t) - is(-t))e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} r(-t)e^{-i\omega t} dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} s(-t)e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(u)e^{i\omega u} du - i \int_{-\infty}^{+\infty} s(u)e^{i\omega u} du = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} r(u)e^{i\omega u} du + i \int_{-\infty}^{+\infty} s(u)e^{i\omega u} du}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi i seguenti risultati: se  $f$  è una funzione reale pari, allora anche  $\hat{f}$  è reale e pari; se invece  $f$  è reale e dispari, allora  $\hat{f}$  è immaginaria e dispari.

- *Riscaldamento.* Se scriviamo la trasformata di Fourier della funzione  $g(t) = f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ , dove  $\lambda$  è un numero reale positivo, abbiamo  $\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) e^{-i\omega t} dt$ , che con la sostituzione  $t = u\lambda$  diventa  $\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u \lambda} du$ . Si ha quindi  $\hat{g}(\omega) = \lambda \hat{f}(\lambda\omega)$ .

Osserviamo che esiste un semplice modo per ritrovare la funzione  $f$  a partire dalla sua trasformata. Se infatti conosciamo  $\hat{x}(\omega) = F_x(\omega)$ , possiamo calcolare  $x(t)$  tramite la formula della **trasformata di Fourier inversa**, cioè:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (9.9)$$

Come esempio di applicazione della (9.9), vediamo come si ritrova la  $x(t)$  definita dalla (9.8) (nel caso particolare  $T = 2$ ) a partire dalla sua trasformata  $F_x(\omega) = 2 \frac{\text{sen}\omega}{\omega}$ .

A tale scopo, occorre utilizzare la seguente formula:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx = \pi^{(18)}. \quad (9.10)$$

Osserviamo che dalla (9.10) è facile dedurre il valore dell'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}kx}{x} dx$ , con  $k$  costante reale non nulla. Supponiamo infatti dapprima che sia  $k > 0$ ; eseguendo nell'integrale la sostituzione  $x = \frac{t}{k}$ , esso diventa  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}t}{\frac{t}{k}} \frac{dt}{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}t}{t} dt = \pi$ . Invece per  $k < 0$ , eseguendo la stessa sostituzione, si trova  $\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\text{sen}t}{\frac{t}{k}} \frac{dt}{k} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}t}{t} dt = -\pi$ .

Se dunque  $F_x(\omega) = 2 \frac{\text{sen}\omega}{\omega}$ , l'applicazione della (9.9) dà:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\text{sen}\omega}{\omega} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}\omega}{\omega} (\cos\omega t + i\text{sen}\omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}\omega \cos\omega t}{\omega} d\omega + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}\omega \text{sen}\omega t}{\omega} d\omega. \end{aligned}$$

<sup>18</sup> Questo è un noto risultato che si può ottenere utilizzando alcuni teoremi sulle funzioni di variabile complessa. Si osservi che, sebbene l'integrale (9.8) risulti finito, tuttavia la funzione  $\frac{\text{sen}x}{x}$  non è sommabile, in quanto  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\text{sen}x}{x} \right| dx$  diverge. In sostanza, si ha qui una situazione analoga alla convergenza semplice ma non assoluta di una serie: alcune serie infatti (ad esempio a segni alterni) sono convergenti perché i termini positivi e negativi tendono in qualche modo a "compensarsi", ma la serie degli stessi termini presi in modulo può divergere.

Il secondo integrale è nullo, perché la funzione integranda è dispari; perciò rimane  $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen} \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega$ , che grazie alle formule di Werner si può anche scrivere  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}((1+t)\omega) + \text{sen}((1-t)\omega)}{\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}((1+t)\omega)}{\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}((1-t)\omega)}{\omega} d\omega$ . Ora, se  $t$  è compreso tra  $-1$  e  $1$ , le espressioni  $1+t$  e  $1-t$  sono entrambe positive, perciò i due integrali  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}((1+t)\omega)}{\omega} d\omega$  e  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}((1-t)\omega)}{\omega} d\omega$  valgono entrambi  $\pi$ ; si ottiene perciò  $x(t) = 1$ . Se invece  $t > 1$ , abbiamo  $1+t > 0$  ma  $1-t < 0$ , cosicché  $x(t) = 0$ , e lo stesso accade per  $t < -1$ ; si ritrova così la (9.8) con  $T = 2$ .

Come osservato prima, la presenza nella (9.5) del termine esponenziale  $e^{-i\omega t}$  fa sì che la trasformata di Fourier  $\hat{x}(\omega)$  sia in generale una funzione a valori complessi anche se  $x(t)$  ha solo valori reali. Possiamo quindi scrivere  $\hat{x}(\omega) = F_x(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$ . Ora, in precedenza abbiamo definito gli spettri di potenza, ampiezza e fase considerando opportune successioni di numeri complessi (i coefficienti  $c_n$  nello sviluppo in serie di Fourier); ora, tramite la trasformata appena definita, possiamo ridefinire questi spettri come funzioni della variabile *continua*  $\omega$ . Abbiamo infatti le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} p(\omega) &= |F_x(\omega)|; \\ P(\omega) &= |F_x(\omega)|^2; \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\Psi(\omega) = \text{argomento principale del numero } F_x(\omega) = A(\omega) + iB(\omega),$$

dove naturalmente adotteremo per  $\Psi(\omega)$  una convenzione analoga a quella usata in precedenza per mantenerne la disparità.

Vediamo meglio la relazione tra la trasformata di Fourier ed i coefficienti della serie di Fourier. Riprendiamo l'ultimo esempio del par. 9, cioè la funzione  $x(t)$  di periodo  $T$  che vale  $A$  tra  $-r/2$  ed  $r/2$  (con  $0 < r < T$ ). Supponiamo di scrivere la serie di Fourier nella forma

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n e^{in\omega_0 t}, \text{ cioè una forma analoga alla (3.10), dove però il coefficiente } k_n \text{ è uguale a } Tc_n,$$

$$\text{perciò } k_n = \int_T x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \int_{-r/2}^{r/2} A e^{-in\omega_0 t} dt \quad \text{Grazie ai calcoli già effettuati, sappiamo che vale la}$$

$$\text{formula } k_n = Ar \frac{\text{sen} \frac{n\pi r}{T}}{\frac{n\pi r}{T}}, \text{ che estendiamo per continuità anche al caso } n = 0 \text{ (ponendo } k_0 = Ar).$$

Se ora utilizziamo i coefficienti  $k_n$  al posto dei  $c_n$  per definire lo spettro di ampiezza, troviamo un risultato del tutto analogo a quello visto in precedenza, con l'unica differenza che, avendo moltiplicato i  $c_n$  per  $T$ , per tracciare i valori dello spettro di ampiezza occorrerà considerare opportuni valori della funzione  $Ar \left| \frac{\text{sen} x}{x} \right|$ . Nel grafico riportato alla fine del par. 4, troviamo 3 righe verticali tra  $0$  e  $\pi$ , altre 3 righe tra  $\pi$  e  $2\pi$ , e così via; ciò è dovuto naturalmente alla particolare scelta di  $r$  uguale ad un quarto di  $T$ .

Supponiamo adesso di lasciare inalterato l'intervallo  $\left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right]$  in cui la funzione è non nulla, ma di ampliare il periodo. Se ad esempio  $r = 1$  e  $T = 8$ , avremo dei calcoli del tutto simili a quelli già fatti, ma questa volta nel grafico della funzione  $Ar \left| \frac{\text{sen} x}{x} \right|$  dovremo tracciare 7 righe all'interno di ogni intervallo  $(n\pi, (n+1)\pi)$ , in quanto dovremo considerare i valori di tale funzione (oltre che in 0) nei punti  $\pm \frac{\pi}{8}, \pm \frac{2\pi}{8}, \pm \frac{3\pi}{8}$ , ecc.

Ora, non è difficile intuire che cosa accade se supponiamo  $T \rightarrow +\infty$ . In questo caso limite la funzione non è più periodica: fisicamente, possiamo immaginare che il "treno di impulsi" periodico di riduca ad un solo impulso di durata  $r$ . Al crescere di  $T$  le righe dello spettro di ampiezza si infittiscono, cosicché possiamo immaginare che al limite esse tendano a descrivere tutta la funzione  $Ar \left| \frac{\text{sen} \omega}{\omega} \right|$ . Contemporaneamente, l'integrale che definisce  $k_n$ , inizialmente esteso ad un intervallo di

ampiezza  $T$ , diventa un integrale esteso a tutto  $\mathbb{R}$ , precisamente diventa  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$ , che è proprio l'integrale che definisce la trasformata di Fourier. In conclusione, ciascuno di questi  $k_n$ , che come abbiamo detto forniscono una rappresentazione "alternativa" della serie di Fourier, per  $T \rightarrow +\infty$  dà la trasformata di Fourier della funzione  $x(t)$ .

Come ulteriore relazione tra serie e trasformata di Fourier, osserviamo quanto segue. Sia  $x$  un segnale definito solo nell'intervallo  $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ , e supponiamo al solito che l'integrale di  $x(t)$  su tale intervallo sia finito. Per quanto detto prima, la trasformata di Fourier di  $x$  è data da

$$F_x(\omega) = \int_{-L/2}^{L/2} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (9.12)$$

Se nella (9.12) sostituiamo  $\omega$  con  $n\omega_0$ , troviamo

$$F_x(n\omega_0) = \int_{-L/2}^{L/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \int_L x(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad (9.13)$$

che, se poniamo  $\omega_0 = \frac{2\pi}{L}$ , diventa

$$F_x(n\omega_0) = \int_L x(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{L}} dt, \quad (9.14)$$

dove  $n$  può assumere qualunque valore intero.

Ora, la  $x(t)$  si può anche rappresentare in serie di Fourier, nell'intervallo  $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ , come

$$x(t) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n e^{in\omega_0 t}, \quad (9.15)$$

dove abbiamo ancora utilizzato la stessa rappresentazione "alternativa" vista sopra. Come sappiamo, in questo caso l'espressione di  $k_n$  è:

$$k_n = \int_L x(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad (9.16)$$

sempre con  $n$  intero. Confrontando la (9.16) con la (9.13), concludiamo che  $k_n$  è uguale a  $F_x(n\omega_0)$ . Possiamo pertanto osservare quanto segue: nel caso di un segnale definito solo su un intervallo limitato di lunghezza  $L$ , la sua trasformata di Fourier  $F_x(\omega)$  assume gli stessi valori dei coefficienti di Fourier (modificati come specificato sopra) al variare di  $\omega$  in una successione bilaterale di punti sull'asse  $\omega$ , punti che sono ugualmente distanziati (precisamente, la distanza tra due punti consecutivi è  $\omega_0 = \frac{2\pi}{L}$ ).

## 10. CORRELAZIONE INCROCIATA, AUTOCORRELAZIONE, CONVOLUZIONE

Definiamo qui alcune operazioni binarie tra funzioni, che rivestono un notevole interesse nell'analisi armonica.

Consideriamo due funzioni  $x(t)$  ed  $y(t)$ , entrambe periodiche di periodo  $T$ ; indichiamo quindi con il termine **correlazione incrociata**<sup>(19)</sup> delle funzioni  $x$  ed  $y$  la funzione così definita:

$$\hat{Z}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t) y(t + \tau) dt. \quad (10.1)$$

Si usa anche il simbolo  $f \star g$  per indicare la correlazione incrociata tra le funzioni  $f$  e  $g$ <sup>(20)</sup>.

Si noti che, analogamente a quanto detto prima sulla trasformata di Fourier, l'integrale nella (10.1) va inteso come un **operatore binario**, che a due funzioni  $x$  ed  $y$  scelte in un opportuno spazio fa corrispondere una terza funzione nello stesso spazio (o anche in un altro spazio).

**Osservazione.** Abbiamo dato la definizione (10.1) per due funzioni **reali** e **periodiche** con lo stesso periodo. Più in generale, la definizione di correlazione incrociata si può dare per funzioni complesse, non necessariamente periodiche. In questo caso si scrive  $(f \star g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} g(t + \tau) d\tau$  (senza alcun fattore numerico davanti all'integrale).

Vediamo un semplice esempio. Siano  $x(t)$  ed  $y(t)$  le funzioni di periodo  $T$ , definite come:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq t \leq r \\ 0 & \text{per } r < t < T; \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 2 & \text{per } 0 \leq t \leq r \\ 0 & \text{per } r < t < T, \end{cases} \quad (10.2)$$

dove  $r$  è positivo e minore di  $\frac{T}{2}$ . Dalla definizione (10.1) è chiaro che anche la  $\hat{Z}_{xy}(\tau)$  risulta periodica di periodo  $T$ , in quanto si ha  $\hat{Z}_{xy}(\tau + T) = \frac{1}{T} \int_T x(t) y(t + \tau + T) dt$ , che però è uguale a

<sup>19</sup> Il termine comunemente utilizzato nei testi in inglese è *crosscorrelation* (o anche *cross-correlation*).

<sup>20</sup> Nella scrittura manuale, si può utilizzare l'asterisco incluso in un cerchietto.

$\frac{1}{T} \int x(t)y(t+\tau)dt$  grazie alla periodicit  della  $y$ . Di conseguenza   sufficiente calcolare la  $\hat{Z}_{xy}$  su un intervallo di ampiezza  $T$ , diciamo  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ .

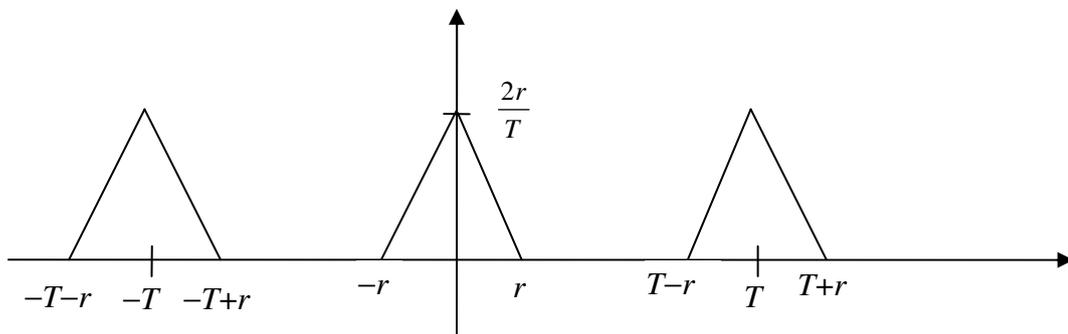
Si fissi dapprima  $\tau$  tale che  $0 < \tau < r$ ; essendo il grafico di  $y(t + \tau)$  lo stesso di  $y(t)$  traslato a sinistra di un segmento  $\tau$ , ed essendo in questo caso  $\tau < r$ , vediamo facilmente che le due funzioni  $x(t)$  ed  $y(t + \tau)$  sono entrambe diverse da 0 solo per  $t$  variabile in  $[0, r - \tau]$ . Abbiamo allora

$$\hat{Z}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{r-\tau} 1 \cdot 2dt = \frac{2}{T}(r - \tau).$$

In modo analogo, se    $-r < \tau < 0$ , il grafico di  $y(t + \tau)$    ancora lo stesso di  $y(t)$ , stavolta traslato a destra di una misura  $|\tau| = -\tau$ ; in questo caso le due funzioni  $x(t)$  ed  $y(t + \tau)$  sono entrambe non nulle solo in  $[-\tau, r]$ , perci  si ha

$$\hat{Z}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\tau}^r 1 \cdot 2dt = \frac{2}{T}(r + \tau). \quad (10.3)$$

Infine, per gli altri valori di  $\tau$  (cio   $-\frac{T}{2} \leq \tau \leq -r$  oppure  $r \leq \tau \leq \frac{T}{2}$ ), lo "shift" della funzione  $y$  far  s  che non vi siano intervalli in cui le due funzioni sono entrambe non nulle, pertanto si avr   $\hat{Z}_{xy}(\tau) = 0$ . In conclusione, si otterr  il seguente grafico:



Ci si pu  chiedere quale sia la relazione tra gli sviluppi in serie di Fourier delle funzioni  $x$ ,  $y$  e  $\hat{Z}_{xy}$ . A tale domanda risponde il seguente

**TEOREMA 2 (teorema di correlazione).** Siano

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega_0 t}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega_0 t}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{in\omega_0 \tau}$$

gli sviluppi in serie di Fourier delle funzioni  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\hat{Z}_{xy}(\tau)$ . Vale allora per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  la relazione

$$\gamma_n = \overline{\alpha_n} \beta_n. \quad (10.4)$$

**Dimostrazione.** Ricordiamo che per i coefficienti  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$  valgono le formule

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-in\omega_0 t} dt ;$$

$$\beta_n = \frac{1}{T} \int_T y(t) e^{-in\omega_0 t} dt ;$$

$$\gamma_n = \frac{1}{T} \int_T \hat{Z}_{xy}(\tau) e^{-in\omega_0 \tau} d\tau .$$

Se riprendiamo la definizione (10.1) e sostituiamo  $y(t + \tau)$  con il suo sviluppo in serie, otteniamo:

$$\hat{Z}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega_0(t+\tau)} \right) dt ,$$

che, invertendo l'integrale con la serie, si può anche scrivere

$$\hat{Z}_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \beta_n e^{in\omega_0 \tau} \left( \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{in\omega_0 t} dt \right) \right) . \quad (10.5)$$

Ma il termine  $\frac{1}{T} \int_T x(t) e^{in\omega_0 t} dt$  è uguale al coniugato di  $\alpha_n$ , cosicché la (10.5) diventa:

$$\hat{Z}_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\alpha_n} \beta_n e^{in\omega_0 \tau} ,$$

il che dimostra la (10.4).  $\square$

Verifichiamo la (10.4) con l'esempio visto prima. Dalle funzioni  $x$  ed  $y$  definite dalle (10.2) abbiamo trovato una funzione  $\hat{Z}_{xy}(\tau)$ , anch'essa di periodo  $T$ , definita in  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  come segue:

$$\hat{Z}_{xy}(\tau) = \begin{cases} \frac{2}{T}(r + \tau) & \text{per } -r \leq t < 0 \\ \frac{2}{T}(r - \tau) & \text{per } 0 \leq t \leq r \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Dalle definizioni (10.2) ricaviamo facilmente

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^r dt = \frac{r}{T} ,$$

e per  $n$  intero non nullo:

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^r e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{e^{-in\omega_0 t}}{-in\omega_0} \right]_0^r,$$

dove  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Si ha quindi  $\alpha_n = -\frac{1}{2\pi in} (e^{-in\omega_0 r} - 1) = \frac{i}{2\pi n} (\cos n\omega_0 r - i \operatorname{sen} n\omega_0 r - 1) =$   
 $= \frac{1}{2\pi n} (\operatorname{sen} n\omega_0 r + i(\cos n\omega_0 r - 1))$ . Perciò abbiamo anche  $\beta_0 = \frac{2r}{T}$  e, per  $n$  intero non nullo,  
 $\beta_n = \frac{1}{\pi n} (\operatorname{sen} n\omega_0 r + i(\cos n\omega_0 r - 1))$ .

Se ora determiniamo esplicitamente i coefficienti di Fourier della funzione  $\hat{Z}_{xy}(\tau)$ , troviamo intanto  $\gamma_0 = \frac{1}{T} \left( \int_{-r}^0 \frac{2}{T} (r + \tau) d\tau + \int_0^r \frac{2}{T} (r - \tau) d\tau \right) = \frac{2}{T^2} \left[ r\tau + \frac{\tau^2}{2} \right]_{-r}^0 + \frac{2}{T^2} \left[ r\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_0^r = \frac{2r^2}{T^2}$ ; inoltre per un generico  $n$  intero non nullo è:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{T} \left( \int_{-r}^0 \frac{2}{T} (r + \tau) e^{-in\omega_0 \tau} d\tau + \int_0^r \frac{2}{T} (r - \tau) e^{-in\omega_0 \tau} d\tau \right) = \\ &= \frac{2r}{T^2} \int_{-r}^0 e^{-in\omega_0 \tau} d\tau + \frac{2}{T^2} \int_{-r}^0 \tau e^{-in\omega_0 \tau} d\tau + \frac{2r}{T^2} \int_0^r e^{-in\omega_0 \tau} d\tau - \frac{2}{T^2} \int_0^r \tau e^{-in\omega_0 \tau} d\tau = \frac{1 - \cos n\omega_0 r}{\pi^2 n^2}. \end{aligned}$$

A questo punto, un calcolo diretto mostra che per ogni  $n$  è  $\gamma_n = \overline{\alpha_n} \beta_n$ .

Se nella (10.1) supponiamo  $y(t) = x(t)$ , otteniamo:

$$\hat{Z}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t) x(t + \tau) dt; \quad (10.6)$$

che possiamo indicare con il termine **funzione di autocorrelazione** della data  $x(t)$ . Se indichiamo ancora con  $\gamma_n$  il coefficiente di Fourier di indice  $n$  relativo alla funzione  $\hat{Z}_{xx}$ , allora la (10.4) diventa

$$\gamma_n = \overline{\alpha_n} \alpha_n = |\alpha_n|^2, \quad (10.7)$$

dato che ovviamente  $\beta_n = \alpha_n$ . Perciò si può dare il seguente sviluppo di  $\hat{Z}_{xx}$ :

$$\hat{Z}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t) x(t + \tau) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 e^{in\omega_0 \tau}. \quad (10.8)$$

Nel caso particolare  $\tau = 0$  la (10.8) dà  $\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$ , che è come dire

$$\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt = \alpha_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2,$$

cioè l'identità di Parseval.

Consideriamo ancora due distinte funzioni  $x(t)$  ed  $y(t)$  aventi periodo  $T$ ; indichiamo allora con il termine **convoluzione** delle due funzioni la funzione  $Z_{xy}(\tau)$  definita come segue:

$$Z_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t)y(\tau-t)dt. \quad (10.9)$$

Questa formula presenta un'evidente somiglianza con la (10.1); in effetti, se indichiamo con  $f * g$  la convoluzione tra le funzioni  $f$  e  $g$ , abbiamo la seguente identità:

$$f \star g = \overline{f} * g,$$

dove abbiamo indicato con  $\overline{f}$  la funzione che a  $t$  associa  $f(-t)$  (nel caso delle funzioni complesse si scriverà  $f \star g = \overline{f} * g$ ).

L'operatore di convoluzione è commutativo; per dimostrare questa proprietà, si consideri che  $Z_{yx}(\tau)$  è uguale a  $\frac{1}{T} \int_0^T y(t)x(\tau-t)dt$ . Con la sostituzione  $t = \tau - u$ , questo integrale diventa:

$$\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau-T} y(\tau-u)x(u)(-1)du = \frac{1}{T} \int_{\tau-T}^{\tau} x(u)y(\tau-u)du,$$

che coincide con  $Z_{xy}(\tau)$ , visto che l'integrale di una funzione periodica è sempre lo stesso su intervalli di ampiezza pari ad un periodo.

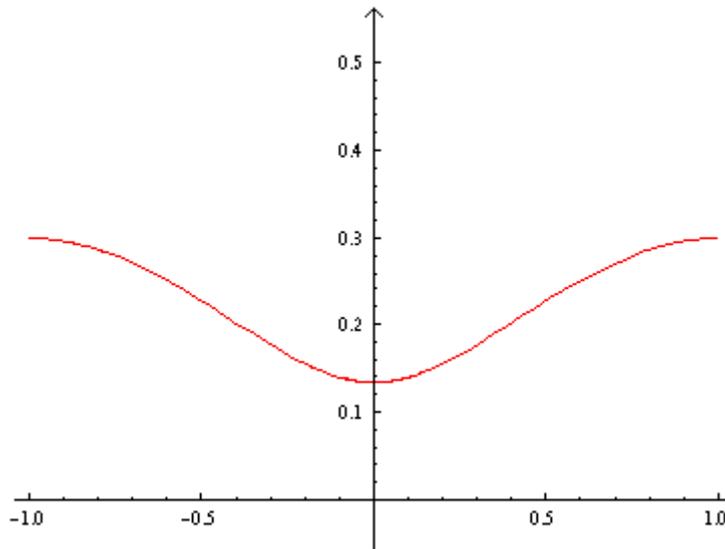
Per fare un esempio, consideriamo le due funzioni  $x(t)$  ed  $y(t)$ , di periodo 2, definite in  $[-1, 1]$  come segue:  $x(t) = 1 - t^2$ ,  $y(t) = t^2$ . Come già osservato per la correlazione incrociata, è chiaro che anche la convoluzione dà luogo ad una funzione periodica con lo stesso periodo, per cui possiamo limitarci a calcolare  $Z_{xy}(\tau)$  solo per  $-1 \leq \tau < 1$ . Per calcolare correttamente l'integrale (10.9), occorre dapprima scrivere l'espressione esplicita di  $y(t)$  in opportuni intervalli, Osserviamo allora che è  $y(t) = t^2$  per  $t \in [-1, 1]$ ,  $y(t) = (t+2)^2$  in  $[-3, -1]$ ,  $y(t) = (t-2)^2$  in  $[1, 3]$ . Supponiamo ora che sia  $0 \leq \tau < 1$ . Si ha  $-1 \leq t - \tau \leq 1$  per  $-1 + \tau \leq t \leq 1 + \tau$ , mentre si ha  $1 \leq t - \tau \leq 3$  per  $-3 + \tau \leq t \leq -1 + \tau$ ; ciò significa che per calcolare  $Z_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(t)y(\tau-t)dt$  è necessario suddividere l'intervallo di integrazione nei due intervalli  $[-1, -1 + \tau]$  e  $[-1 + \tau, 1]$ :

$$\begin{aligned} Z_{xy}(\tau) &= (x * y)(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t)y(\tau-t)dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{-1+\tau} (1-t^2)(t-\tau+2)^2 dt + \frac{1}{2} \int_{-1+\tau}^1 (1-t^2)(t-\tau)^2 dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{-1+\tau} ((2-\tau)^2 + 2(2-\tau)t - (\tau^2 - 4\tau + 3)t^2 - 2(2-\tau)t^3 - t^4) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1+\tau}^1 (\tau^2 - 2\tau t + (1-\tau^2)t^2 + 2\tau t^3 - t^4) dt = \frac{2}{15} + \frac{2}{3}\tau^2 - \frac{2}{3}\tau^3 + \frac{\tau^4}{6} \end{aligned}$$

Per  $-1 \leq \tau \leq 0$  il ragionamento è analogo: si ha  $-1 \leq t - \tau \leq 1$  per  $-1 + \tau \leq t \leq 1 + \tau$ , mentre si ha  $-3 \leq t - \tau \leq -1$  per  $1 + \tau \leq t \leq 3 + \tau$ ; perciò:

$$\begin{aligned} Z_{xy}(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1+\tau} (1-t^2)(t-\tau)^2 dt + \frac{1}{2} \int_{1+\tau}^1 (1-t^2)(\tau-t+2)^2 dt = \\ &= \frac{2}{15} + \frac{2}{3}\tau^2 + \frac{2}{3}\tau^3 + \frac{\tau^4}{6}. \end{aligned}$$

La figura che segue mostra il grafico della convoluzione così trovata, limitatamente all'intervallo  $[-1, 1]$ .



**Esercizio 10.1.** Calcolare esplicitamente la convoluzione delle due funzioni  $x(t)$  ed  $y(t)$  definite dalla (10.2). (*Suggerimento:* conviene considerare i due casi  $0 \leq \tau < r$  ed  $r \leq \tau < 2r$ .)

{*Soluzione:* limitatamente all'intervallo  $[0, T)$  si ha  $Z_{xy}(\tau) = \frac{2\tau}{T}$  per  $0 \leq \tau < r$ ,  
 $Z_{xy}(\tau) = \frac{2(2r-\tau)}{T}$  per  $r \leq \tau < 2r$ ,  $Z_{xy}(\tau) = 0$  per  $2r \leq \tau < T$ .}

Analogamente a quanto stabilito dal teor. 2, possiamo dare anche qui un'interessante relazione tra i coefficienti degli sviluppi in serie di Fourier delle funzioni  $x, y, Z_{xy}$ .

**TEOREMA 3 (teorema di convoluzione).** Siano, come nell'enunciato del teor. 2,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega_0 t}$ ,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega_0 t}$ ,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{in\omega_0 \tau}$  gli sviluppi in serie di Fourier rispettivamente delle funzioni  $x(t), y(t), \hat{Z}_{xy}(\tau)$ . Si ha allora per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  la relazione

$$\gamma_n = \alpha_n \beta_n. \quad (10.10)$$

Il lettore può ricavare facilmente da sé la dimostrazione, che è del tutto simile a quella del teor. 2.

Esiste inoltre una relazione molto importante tra convoluzione e trasformata di Fourier. Come abbiamo osservato sopra, se  $x(t)$  ed  $y(t)$  sono due funzioni sommabili in  $\mathbb{R}$ , possiamo definire tramite la (10.5) le loro rispettive trasformate di Fourier:

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt; \quad F_y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-i\omega t} dt.$$

D'altra parte, essendo  $x$  ed  $y$  due funzioni non periodiche e definite su tutto  $\mathbb{R}$ , adottiamo per la convoluzione la definizione  $(x * y)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau-t)dt$ . Abbiamo allora il seguente risultato:

**TEOREMA 4.** La trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione  $z = x * y$  è uguale al prodotto delle due trasformate  $F_x$  ed  $F_y$ .

**Dimostrazione.** Per un generico valore  $\omega$ , la trasformata di Fourier della convoluzione è:

$$F_z(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x * y)(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du \right) e^{-i\omega t} dt = \iint_{\mathbb{R}^2} x(u)y(t-u)e^{-i\omega t} dudt.$$

Cambiando l'ordine di integrazione, questo integrale diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)du \left( \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)e^{-i\omega t} dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-i\omega u} du \left( \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)e^{-i\omega(t-u)} dt \right). \quad (10.11)$$

Ma l'integrale "interno"  $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)e^{-i\omega(t-u)} dt$ , tramite una semplice traslazione, diventa  $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-i\omega t} dt$ . A questo punto i due integrali al secondo membro della (10.11) sono indipendenti, e di conseguenza abbiamo il prodotto delle trasformate  $F_x(\omega) \cdot F_y(\omega)$ .  $\square$

Come esempio, consideriamo le due funzioni definite in tutto  $\mathbb{R}$  come segue:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrove;} \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} t & \text{per } -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Applicando la (9.5), troviamo facilmente le rispettive trasformate di Fourier:

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{2\text{sen}\omega}{\omega};$$

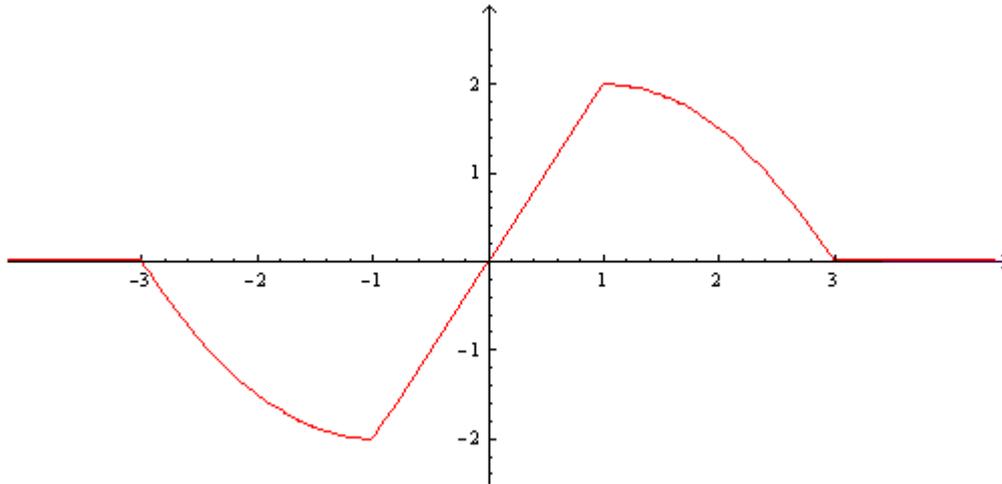
$$F_y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-2}^2 te^{-i\omega t} dt = 2i \left( \frac{2\cos 2\omega}{\omega} - \frac{\text{sen} 2\omega}{\omega^2} \right) \quad (21).$$

Per quanto riguarda invece la convoluzione, abbiamo

<sup>21</sup> Visto che capita spesso di dover calcolare integrali di questo tipo, alcune formule utili sono state riportate in appendice.

$$Z_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau-t)dt.$$

La funzione  $y(\tau - t)$  vale  $\tau - t$ , purché sia  $-2 \leq \tau - t \leq 2$ , cioè  $-2 + \tau \leq t \leq 2 + \tau$ : in pratica, il suo grafico è il segmento limitato dai punti  $(-2 + \tau; -2 + \tau)$  e  $(2 + \tau; 2 + \tau)$ . Ora, se  $|\tau| > 3$ , questo



segmento si sposta tutto al di fuori dell'intervallo  $[-1, 1]$ , pertanto il prodotto delle due funzioni è nullo, e di conseguenza è  $Z_{xy}(\tau) = 0$ . Se  $-1 \leq \tau \leq 1$ , le due funzioni sono entrambe non nulle per

$t \in [-1, 1]$ , perciò si ha  $Z_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau-t)dt = \int_{-1}^1 (\tau-t)dt = 2\tau$ . Se  $1 < \tau \leq 3$ , l'estremo sinistro

del segmento cade tra  $-1$  e  $-1$ , perciò è  $Z_{xy}(\tau) = \int_{-2+\tau}^1 (\tau-t)dt = -\frac{\tau^2}{2} + \tau + \frac{3}{2}$ . Infine, se  $-3 \leq \tau \leq -1$ ,

l'estremo destro del segmento cade tra  $-1$  e  $1$ , per cui è  $Z_{xy}(\tau) = \int_{-1}^{\tau+2} (\tau-t)dt = \frac{\tau^2}{2} + \tau - \frac{3}{2}$ . Si ottiene

quindi la funzione continua rappresentata nella figura sopra, il cui grafico comprende, oltre a due semirette sull'asse delle ascisse, un segmento e due archi di parabola.

Calcoliamo ora  $F_z(\omega)$ , trasformata di Fourier della convoluzione:

$$\begin{aligned} F_z(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{xy}(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-3}^{-1} \left( \frac{t^2}{2} + t - \frac{3}{2} \right) e^{-i\omega t} dt + \int_{-1}^1 2te^{-i\omega t} dt + \int_1^3 \left( -\frac{t^2}{2} + t + \frac{3}{2} \right) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} t^2 e^{-i\omega t} dt + \int_{-3}^{-1} te^{-i\omega t} dt - \frac{3}{2} \int_{-3}^{-1} e^{-i\omega t} dt + 2 \int_{-1}^1 te^{-i\omega t} dt - \frac{1}{2} \int_1^3 t^2 e^{-i\omega t} dt + \int_1^3 te^{-i\omega t} dt + \frac{3}{2} \int_1^3 e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{-\operatorname{sen}\omega + 9\operatorname{sen}3\omega}{\omega} + \frac{-2\cos\omega + 6\cos 3\omega}{\omega^2} + \frac{-2\operatorname{sen}3\omega + 2\operatorname{sen}\omega}{\omega^3} + i \frac{\cos\omega - 9\cos 3\omega}{\omega} + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{6\operatorname{sen}3\omega - 2\operatorname{sen}\omega}{\omega^2} + i \frac{2\cos 3\omega - 2\cos\omega}{\omega^3} \right) + \frac{\operatorname{sen}\omega - 3\operatorname{sen}3\omega}{\omega} + \frac{\cos\omega - \cos 3\omega}{\omega^2} + \\ &\quad + i \left( \frac{-\cos\omega + 3\cos 3\omega}{\omega} + \frac{-\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}3\omega}{\omega^2} \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{-\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}3\omega}{\omega} + i \frac{\cos\omega - \cos 3\omega}{\omega} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2i \left( \frac{2 \cos \omega}{\omega} - \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\omega^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{9 \operatorname{sen} 3\omega - \operatorname{sen} \omega}{\omega} + \frac{6 \cos 3\omega - 2 \cos \omega}{\omega^2} + \frac{2 \operatorname{sen} \omega - 2 \operatorname{sen} 3\omega}{\omega^3} + \right. \\
& \left. + i \frac{9 \cos 3\omega - \cos \omega}{\omega} + i \frac{2 \operatorname{sen} \omega - 6 \operatorname{sen} 3\omega}{\omega^2} + i \frac{2 \cos \omega - 2 \cos 3\omega}{\omega^3} \right) + \frac{3 \operatorname{sen} 3\omega - \operatorname{sen} \omega}{\omega} + \\
& + \frac{\cos 3\omega - \cos \omega}{\omega^2} + i \frac{3 \cos 3\omega - \cos \omega}{\omega} + i \frac{\operatorname{sen} \omega - \operatorname{sen} 3\omega}{\omega^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{\operatorname{sen} 3\omega - \operatorname{sen} \omega}{\omega} + i \frac{\cos 3\omega - \cos \omega}{\omega} \right) = \\
& = 4i \frac{\operatorname{sen} 3\omega - \operatorname{sen} \omega}{\omega^2} + 2i \frac{\cos 3\omega - \cos \omega}{\omega^3}.
\end{aligned}$$

Applicando le formule di prostaferesi, questo diventa  $4i \operatorname{sen} \omega \left( \frac{2 \cos 2\omega}{\omega^2} - \frac{\operatorname{sen} 2\omega}{\omega^3} \right)$ , che coincide con il prodotto delle due trasformate  $F_x(\omega)$  ed  $F_y(\omega)$  calcolate prima.

## 11. TEOREMI DI CAMPIONAMENTO.

Come abbiamo già osservato in precedenza, dato un segnale di durata  $L$ , esteso per periodicità a tutto l'asse reale, è possibile sotto opportune ipotesi rappresentarlo in serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad (11.1)$$

dove  $c_n = \frac{1}{L} \int_T x(t) e^{-in\omega_0 t} dt$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{L}$  (22).

Dunque per conoscere in maniera *esatta* il segnale  $x$  bisognerebbe disporre di un numero infinito di coefficienti  $c_n$ , il che non è "praticamente" possibile. Ora, la (11.1) si può anche scrivere nella forma

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t,$$

formula che contiene solo funzioni reali. Perciò  $x(t)$  si può rappresentare come la sovrapposizione di infinite funzioni periodiche, le cui frequenze sono tutte multiple di una certa frequenza fondamentale. Abbiamo infatti indicato con  $\omega_0$  la pulsazione, cioè la "frequenza angolare fondamentale" del segnale considerato: abbiamo quindi, a parte il termine costante  $a_0$ , la somma delle due funzioni  $\cos \omega_0 t$  e  $\operatorname{sen} \omega_0 t$  (ciascuna moltiplicata per coefficienti opportuni), poi le due funzioni  $\cos 2\omega_0 t$  e  $\operatorname{sen} 2\omega_0 t$ , che rappresentano un segnale "elementare" di frequenza doppia rispetto a quella fondamentale, poi abbiamo le funzioni  $\cos 3\omega_0 t$  e  $\operatorname{sen} 3\omega_0 t$ , di frequenza tripla rispetto alla fondamentale, e così via.

Ora, da un punto di vista pratico è inutile considerare frequenze troppo elevate, perché sarebbero del tutto impercettibili. Consideriamo ad esempio un suono, che è un'onda di compressione e rarefazione dell'aria (o di un altro mezzo elastico). Il nostro orecchio è in grado di

<sup>22</sup> Qualche volta può essere comodo indicare con simboli diversi un segnale  $x(t)$  definito solo su un intervallo temporale di ampiezza  $L$  e la sua estensione periodica  $x_p(t)$ . Di solito ne faremo a meno, ma il lettore è invitato a fare attenzione se si sta parlando di una funzione periodica o no. Come visto in precedenza, se  $x(t)$  è una funzione sommabile su un intervallo  $I$  di ampiezza  $L$ , possiamo comunque scrivere la relativa serie di Fourier, che convergerà sotto opportune ipotesi alla  $x$  assegnata in  $I$ , e poi ovviamente per  $t$  al di fuori di  $I$  darà come somma una funzione periodica, che è appunto l'estensione periodica di  $x(t)$ .

percepire suoni in un "range" abbastanza vasto, diciamo da 16 a 20000 Hz<sup>(23)</sup>; ciò significa che nell'analisi "effettiva" di un suono è inutile considerare i termini con  $n$  troppo grande, perché di fatto non danno alcun contributo. Ciò è vero anche per altri tipi di segnali, non necessariamente ricavati da un fenomeno acustico. In altre parole, possiamo sempre supporre che nella pratica si abbia

$$c_n = 0 \quad \text{per ogni } n \text{ tale che } |n| > \hat{N},$$

dove  $\hat{N}$  è un opportuno intero positivo; parliamo allora di segnali "a banda limitata".

Ora, come abbiamo osservato nel par. 9, un campionamento "ideale" del segnale viene ottenuto rilevando la grandezza  $x(t)$  ad intervalli di tempo regolari. Dalla successione dei campioni occorre poi ricostruire il segnale; è intuitivo che un campionamento ad intervalli abbastanza piccoli consentirà di riottenere  $x(t)$  con una precisione accettabile. Il seguente teorema stabilisce una condizione sotto la quale è possibile ricostruire *esattamente* il segnale  $x(t)$ .

**TEOREMA 5 (teorema di campionamento).** Sia  $N$  un numero pari; supponiamo che  $x(t)$  sia un segnale di durata  $L$ , tale che la rappresentazione in serie di Fourier di  $x(t)$  nell'intervallo  $[0, L]$ <sup>(24)</sup> non abbia armoniche con  $n$  maggiore di  $N/2$ . Allora  $x(t)$  è *completamente* determinato dalla successione finita di valori  $x\left(\frac{kL}{N+1}\right)$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Nelle ipotesi dette, si può dare la seguente formula esplicita per  $x(t)$ , al variare di  $t$  in  $[0, L]$ :

$$x(t) = \sum_{k=0}^N x\left(\frac{kL}{N+1}\right) \frac{\text{sen}\left((N+1)\frac{\pi}{L}\left(t - \frac{kL}{N+1}\right)\right)}{(N+1)\text{sen}\left(\frac{\pi}{L}\left(t - \frac{kL}{N+1}\right)\right)}. \quad (11.2)$$

In sostanza, se  $N$  indica un numero pari tale che le armoniche dello sviluppo di  $x(t)$  sono trascurabili per  $|n| > \frac{N}{2}$ , per ottenere una successione di campioni sufficiente allo scopo basta dividere l'intervallo  $L$  in  $N+1$  intervalli, ciascuno dei quali quindi avrà una durata di  $\frac{L}{N+1}$  secondi. La successione di campioni  $x(0)$ ,  $x\left(\frac{L}{N+1}\right)$ ,  $x\left(\frac{2L}{N+1}\right)$ , ...,  $x\left(\frac{NL}{N+1}\right)$  consente di ricostruire in modo esatto il segnale dato.

**Dimostrazione.** Cominciamo col dimostrare un'identità trigonometrica che ci servirà dopo:

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos p\alpha = \frac{\text{sen}\left(\frac{2p+1}{2}\alpha\right)}{2\text{sen}\frac{\alpha}{2}} \quad (\text{per } \alpha \neq 2k\pi). \quad (11.3)$$

<sup>23</sup> In alcuni testi vengono fissati dei limiti leggermente diversi, ad esempio da 20 a 20.000 Hz, o anche da 20 a 16.000 Hz. In ogni caso, questi vanno considerati dei limiti "teorici", anche perché la sensibilità soprattutto alle altissime frequenze non si mantiene costante, anzi tende a diminuire con l'età.

<sup>24</sup> Come osservato prima, questo vuol dire che la serie di Fourier, considerata per ogni  $t$  reale, converge ad una funzione periodica di periodo  $L$ , che è il prolungamento per periodicità di  $x(t)$  su tutto  $\mathbb{R}$ .

Per dimostrare questa identità, basta utilizzare la formula relativa al prodotto  $\sin\alpha\cos\beta$ . Applicando tale formula con  $\frac{\alpha}{2}$  al posto di  $\alpha$  e con  $\beta = m\alpha$ , per  $m$  che assume successivamente i valori  $1, 2, \dots, p$ , otteniamo:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = \frac{\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{2};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha = \frac{\sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}}{2};$$

...

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos p\alpha = \frac{\sin\left(\left(p + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) - \sin\left(\left(p - \frac{1}{2}\right)\alpha\right)}{2}.$$

Sommando membro a membro, troviamo:

$$\sin\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos p\alpha) = \frac{\sin\frac{(2p+1)\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{2},$$

cioè, portando al primo membro il termine  $-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2}$ :

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos p\alpha\right) = \frac{\sin\frac{2p+1}{2}\alpha}{2}.$$

Dividendo infine per  $\sin\frac{\alpha}{2}$  (il che è lecito se  $\alpha$  non è un multiplo di  $2\pi$ ), si ottiene la (11.3).

Ora, per le ipotesi fatte, il segnale  $x(t)$  si rappresenta nell'intervallo  $[0, L)$  tramite una serie di Fourier che in effetti è una somma finita, precisamente:

$$x(t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{L}}. \quad (11.4)$$

In particolare, negli istanti in cui si effettua il campionamento, cioè per  $t = \frac{kL}{N+1}$ , si ha:

$$x\left(\frac{kL}{N+1}\right) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_n e^{\frac{2\pi i n k}{N+1}}. \quad (11.5)$$

Nella (11.5) osserviamo in primo luogo che è indifferente far variare l'indice  $n$  da  $-N$  a  $N$ , visto che abbiamo supposto  $c_n = 0$  per  $|n| > \frac{N}{2}$ . Inoltre poniamo  $U = e^{\frac{2\pi i}{N+1}}$ , cosicchè la (11.5) diventa:

$$x\left(\frac{kL}{N+1}\right) = \sum_{n=-N}^N c_n U^{nk}. \quad (11.6)$$

Introduciamo una nuova variabile intera  $m$ . Quindi moltiplichiamo i due membri della (11.6) per  $U^{-mk}$ , con  $k$  variabile da 0 ad  $N$ , e sommiamo membro a membro le uguaglianze così ottenute. Abbiamo allora:

$$\sum_{k=0}^N x\left(\frac{kL}{N+1}\right) U^{-mk} = \sum_{k=0}^N \sum_{n=-N}^N c_n U^{(n-m)k} = \sum_{n=-N}^N c_n \sum_{k=0}^N U^{(n-m)k}. \quad (11.7)$$

Consideriamo ora l'espressione  $\sum_{k=0}^N U^{(n-m)k}$ , che in effetti non è altro che il prodotto scalare dei due vettori  $(N+1)$ -dimensionali  $(1, U^n, U^{2n}, \dots, U^{Nn})$  e  $(1, U^{-m}, U^{-2m}, \dots, U^{-Nm})$ . Per  $n = m$  questo prodotto scalare vale  $N+1$ . Viceversa, i due vettori sono ortogonali per  $n \neq m$ ; infatti, ricordando la formula  $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^N = \frac{1 - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha}$ , si ha  $1 + U^{n-m} + U^{2(n-m)} + \dots + U^{N(n-m)} = \frac{1 - U^{(N+1)(n-m)}}{1 - U^{n-m}} = \frac{1 - e^{\frac{2\pi i(n-m)(N+1)}{N+1}}}{1 - e^{\frac{2\pi i(n-m)}{N+1}}} = 0$ . Perciò, nell'ultimo membro della (11.7) la sommatoria esterna contiene in realtà solo il termine con  $n = m$ , e di conseguenza la (11.7) si riduce a:

$$\sum_{k=0}^N x\left(\frac{kL}{N+1}\right) U^{-mk} = (N+1)c_m,$$

il che implica

$$c_n = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x\left(\frac{kL}{N+1}\right) U^{-nk} \quad \text{per } k = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}. \quad (11.8)$$

La (11.8) esprime il coefficiente  $c_n$  in modo unico in termini dei valori campionati  $x\left(\frac{kL}{N+1}\right)$ ; questo prova la prima parte del teorema. Per dimostrare la seconda parte, riprendiamo la (11.4) e mettiamo al posto di  $c_n$  l'espressione appena calcolata, ottenendo:

$$x(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \left( \sum_{k=0}^N x\left(\frac{kL}{N+1}\right) U^{-nk} \right) e^{\frac{2\pi i n t}{L}}. \quad (11.9)$$

Essendo  $U = e^{\frac{2\pi i}{N+1}}$ , la (11.9) diventa:

$$x(t) = \sum_{k=0}^N x\left(\frac{kL}{N+1}\right) \left\{ \frac{1}{N+1} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{\frac{2\pi ni}{L}\left(t - \frac{kL}{N+1}\right)} \right\}.$$

Se poniamo  $z = t - \frac{kL}{N+1}$ , quest'ultima uguaglianza diventa

$$x(t) = \sum_{k=0}^N x\left(\frac{kL}{N+1}\right) \left\{ \frac{1}{N+1} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{in\omega_0 z} \right\}. \quad (11.10)$$

Scrivendo esplicitamente la sommatoria più interna nella (11.10), troviamo:

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{in\omega_0 z} = e^{-i\frac{N}{2}\omega_0 z} + e^{-i\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega_0 z} + \dots + e^{-i\omega_0 z} + 1 + e^{i\omega_0 z} + \dots + e^{i\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega_0 z} + e^{i\frac{N}{2}\omega_0 z},$$

che, ricordando l'identità  $e^{\alpha i} + e^{-\alpha i} = 2 \cos \alpha$ , diventa

$$2 \left( \frac{1}{2} + \cos \omega_0 z + \cos 2\omega_0 z + \dots + \cos \frac{N}{2} \omega_0 z \right).$$

Grazie alla (11.3), quest'ultima espressione si può anche scrivere  $\frac{\text{sen}\left((N+1)\omega_0 \frac{z}{2}\right)}{\text{sen}\left(\omega_0 \frac{z}{2}\right)}$ .

Sostituendo nella (11.10), si ha allora

$$x(t) = \sum_{k=0}^N x\left(\frac{kL}{N+1}\right) \frac{\text{sen}\left((N+1)\omega_0 \frac{z}{2}\right)}{(N+1)\text{sen}\left(\omega_0 \frac{z}{2}\right)}.$$

Sostituendo infine  $z = t - \frac{kL}{N+1}$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{L}$ , si trova:

$$x(t) = \sum_{k=0}^N x\left(\frac{kL}{N+1}\right) \frac{\text{sen}\left(\frac{N+1}{L}\pi\left(t - \frac{kL}{N+1}\right)\right)}{(N+1)\text{sen}\left(\frac{\pi}{L}\left(t - \frac{kL}{N+1}\right)\right)},$$

che è appunto la (11.2).  $\square$

Come esempio, consideriamo il segnale  $x(t)$  definito come  $\text{sen}^4 t + \text{sen}^3 t$  nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ ; risulta quindi  $\omega_0 = 1$ . Per semplificare i calcoli successivi, osserviamo che si può scrivere

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^4 t + \operatorname{sen}^3 t &= \frac{(e^{it} - e^{-it})^4}{(2i)^4} + \frac{(e^{it} - e^{-it})^3}{(2i)^3} = \\ &= \frac{e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}}{16} + \frac{e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}}{-8i} = \\ &= \frac{1}{16}e^{-4it} - \frac{i}{8}e^{-3it} - \frac{1}{4}e^{-2it} + \frac{3i}{8}e^{-it} + \frac{3}{8} - \frac{3i}{8}e^{it} - \frac{1}{4}e^{2it} + \frac{i}{8}e^{3it} + \frac{1}{16}e^{4it}, \end{aligned}$$

formula che ci fornisce direttamente lo sviluppo in serie di Fourier della funzione data. Possiamo scrivere infatti  $x(t) = \sum_{n=-4}^4 c_n e^{int}$ , dove  $c_{-4} = \frac{1}{16}$ ,  $c_{-3} = -\frac{i}{8}$ ,  $c_{-2} = -\frac{1}{4}$ ,  $c_{-1} = \frac{3i}{8}$ ,  $c_0 = \frac{3}{8}$ ,  $c_1 = -\frac{3i}{8}$ ,  $c_2 = -\frac{1}{4}$ ,  $c_3 = \frac{i}{8}$ ,  $c_4 = \frac{1}{16}$ . Poiché nello sviluppo appaiono coefficienti  $c_n$  non nulli solo per  $|n| \leq 4$ , possiamo applicare il teor. 5 con  $N = 8$ , per cui l'intervallo  $[0, 2\pi]$  va decomposto in 9 intervalli uguali. I valori di campionamento sono allora:

$$X_0 = 0;$$

$$X_1 = \operatorname{sen}^4 \frac{2\pi}{9} + \operatorname{sen}^3 \frac{2\pi}{9};$$

$$X_2 = \operatorname{sen}^4 \frac{4\pi}{9} + \operatorname{sen}^3 \frac{4\pi}{9};$$

$$X_3 = \operatorname{sen}^4 \frac{2\pi}{3} + \operatorname{sen}^3 \frac{2\pi}{3} = \frac{9 + 6\sqrt{3}}{16};$$

$$X_4 = \operatorname{sen}^4 \frac{8\pi}{9} + \operatorname{sen}^3 \frac{8\pi}{9};$$

$$X_5 = \operatorname{sen}^4 \frac{10\pi}{9} + \operatorname{sen}^3 \frac{10\pi}{9} = \operatorname{sen}^4 \frac{8\pi}{9} - \operatorname{sen}^3 \frac{8\pi}{9};$$

$$X_6 = \operatorname{sen}^4 \frac{4\pi}{3} + \operatorname{sen}^3 \frac{4\pi}{3} = \frac{9 - 6\sqrt{3}}{16};$$

$$X_7 = \operatorname{sen}^4 \frac{14\pi}{9} + \operatorname{sen}^3 \frac{14\pi}{9} = \operatorname{sen}^4 \frac{4\pi}{9} - \operatorname{sen}^3 \frac{4\pi}{9};$$

$$X_8 = \operatorname{sen}^4 \frac{16\pi}{9} + \operatorname{sen}^3 \frac{16\pi}{9} = \operatorname{sen}^4 \frac{2\pi}{9} - \operatorname{sen}^3 \frac{2\pi}{9}.$$

Applicando la (11.2), troviamo:

$$x(t) = \sum_{k=0}^8 X_k \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{9}{2\pi}\pi\left(t - \frac{2k\pi}{9}\right)\right)}{9\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\pi}\left(t - \frac{2k\pi}{9}\right)\right)} = \sum_{k=0}^8 X_k \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{9}{2}t - k\pi\right)}{9\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2} - \frac{k\pi}{9}\right)},$$

che si può anche scrivere  $x(t) = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^8 X_k \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{9}{2}t - k\pi\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2} - \frac{k\pi}{9}\right)}$ , visto che  $X_0 = 0$ .

Essendo  $X_k = \text{sen}^4 \frac{2k\pi}{9} + \text{sen}^3 \frac{2k\pi}{9}$ , un calcolo diretto (seppure molto laborioso), mostra che effettivamente la sommatoria così ottenuta coincide con  $\text{sen}^4 t + \text{sen}^3 t$ , cioè con la  $x(t)$  assegnata prima.

Concludiamo questa prima parte del paragrafo con alcune osservazioni importanti.

Il teorema di campionamento afferma che, nell'ipotesi in cui il segnale  $x(t)$  di durata  $L$  si possa scrivere nella forma (11.4) (il che significa che le armoniche oltre quella di ordine  $N/2$  sono di fatto trascurabili), la conoscenza del valore di  $x(t)$  in  $N + 1$  punti ugualmente distanziati determina in modo unico la funzione  $x(t)$ . Ciò significa che un campionamento ad intervalli più fitti è inutile, perché non si conserva più informazione. Dunque per poter convertire il segnale dato in una sequenza discreta, l'intervallo di campionamento  $\Delta t$  deve soddisfare la condizione

$$\Delta t \leq \frac{L}{N+1}. \quad (11.11)$$

Nelle ipotesi fatte, il segnale  $x(t)$  si può scrivere nella forma

$$x(t) = a_0 + (a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \text{sen} \omega_0 t) + (a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \text{sen} 2\omega_0 t) + \dots + \left( a_{\frac{N}{2}} \cos \frac{N}{2} \omega_0 t + b_{\frac{N}{2}} \text{sen} \frac{N}{2} \omega_0 t \right),$$

il che significa che l'armonica di ordine più elevato è una funzione sinusoidale di pulsazione  $\frac{N}{2} \omega_0$ , perciò di frequenza  $\frac{N}{2} f_0$ , dove  $f_0 = \frac{1}{L}$  è la frequenza fondamentale. Ora, se definiamo la "larghezza di banda"  $B$  tramite la formula  $B = \frac{N}{2} f_0 = \frac{N}{2L}$ , il che vuol dire che  $B$  è la frequenza massima che supponiamo significativa nel segnale, abbiamo  $L = \frac{N}{2B}$ , per cui la (11.11) diventa

$$\Delta t \leq \frac{N}{2B(N+1)}. \quad (11.12)$$

Allora, se  $f_s$  indica la frequenza di campionamento, cioè il numero di campioni al secondo (ovviamente è  $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ ), la (11.12) dà:

$$f_s \geq 2B \left( 1 + \frac{1}{N} \right).$$

Poiché per  $N$  grande il termine  $\frac{1}{N}$  diventa trascurabile, abbiamo infine la condizione

$$f_s \geq 2B. \quad (11.13)$$

Grazie alla (11.13), abbiamo il seguente risultato: per campionare in maniera "esatta", cioè senza perdita di informazione, un segnale di frequenza non superiore a  $B$  Hz, è sufficiente un

numero di campionamenti al secondo uguale al doppio della frequenza massima. Questo giustifica l'adozione dello standard di 44.100 Hz per il campionamento del suono.

Ora, osservando bene il teorema appena dimostrato, possiamo notare che in effetti la (11.2) rappresenta semplicemente un modo diverso di scrivere  $x(t)$ : infatti, come si è visto nell'esempio

sopra, nella frazione  $\frac{\text{sen}\left((N+1)\frac{\pi}{L}\left(t-\frac{kL}{N+1}\right)\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{L}\left(t-\frac{kL}{N+1}\right)\right)}$  la discontinuità è solo apparente, in quanto  $\text{sen } p\alpha$

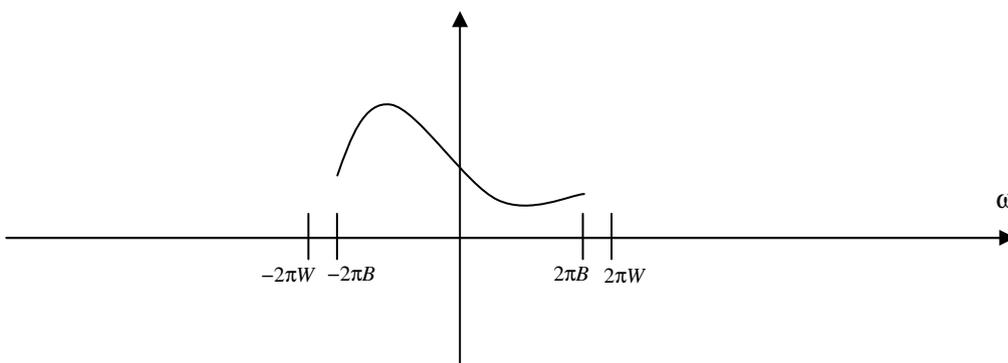
(per  $p$  naturale) è sempre un polinomio in  $\text{sen } \alpha$  di grado  $p$ , nel quale si raccoglie un fattore  $\text{sen } \alpha$ . La (11.2) è stata ottenuta nell'ipotesi che nello sviluppo di Fourier di  $x(t)$  non appaiano armoniche oltre un certo indice, il che significa che  $x(t)$  è "sostanzialmente" una combinazione finita di funzioni sinusoidali. Pertanto, il teor. 5 ci fornisce semplicemente una rappresentazione esplicita di  $x$  in termini dei valori della  $x$  stessa in  $N+1$  istanti di tempo equidistanti in un periodo; in realtà, nell'ipotesi che  $x$  si rappresenti come nella (11.4), è possibile (seppure con formule più complesse) determinare esplicitamente  $x(t)$  conoscendone i valori in  $N+1$  istanti di tempo *qualsiasi*, purché tutti contenuti in un intervallo semiaperto di ampiezza pari ad un periodo.

Esiste un altro teorema di campionamento, che riguarda invece un segnale non periodico, definito in tutto  $\mathbb{R}$ . Esso è denominato comunemente "Teorema di Shannon", anche se già prima di Shannon ne erano note versioni meno generali.

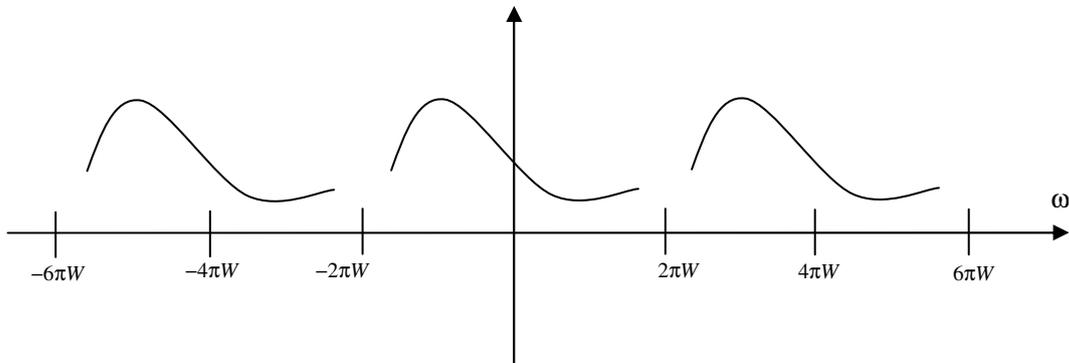
**TEOREMA 6 (Teorema di Shannon).** Sia  $x(t)$  un segnale, funzione sommabile del tempo ( $t \in \mathbb{R}$ ) e a banda limitata (con frequenza massima uguale a  $B$ ). Fissato un intervallo di tempo  $\Delta t$ , supponiamo di eseguire un campionamento in tutti i multipli interi di  $\Delta t$ : si hanno quindi gli infiniti campioni  $x(n\Delta t)$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . Posto  $f_s = \frac{1}{\Delta t}$  (frequenza di campionamento), nell'ipotesi  $f_s \geq 2B$  il segnale  $x(t)$  può essere ricostruito in maniera univoca sulla base dei termini  $x(n\Delta t)$ .

Come si vede, il teor. 6 presenta alcune somiglianze con il teor. 5: supponiamo comunque di eseguire un campionamento a intervalli di tempo costanti, supponiamo che comunque  $x$  sia a banda limitata, e che la frequenza di campionamento sia maggiore del doppio di  $B$ . Però in questo caso supponiamo di avere a disposizione *infiniti* campioni (ipotesi ovviamente non realizzabile in pratica), allo scopo di ricostruire un segnale che in effetti è un *singolo* impulso nel tempo, non periodico. C'è anche un'altra importante differenza tra i due teoremi: in questo caso,  $x$  viene ottenuto come una somma di opportune funzioni sinc.

**Dimostrazione.** Sia  $F_x(\omega)$  la trasformata di Fourier di  $x(t)$ . Avendo supposto che  $x$  abbia una larghezza di banda  $B$ , abbiamo  $F_x(\omega) = 0$  per  $|\omega| > 2\pi B$ . Posto  $W = \frac{f_s}{2}$ , abbiamo per ipotesi  $W \geq B$ : se  $F_x(\omega)$  è nulla per  $\omega$  che varia al di fuori dell'intervallo  $[-2\pi B, 2\pi B]$ , a maggior ragione è nulla al di fuori dell'intervallo  $[-2\pi W, 2\pi W]$ , che contiene il precedente:



Consideriamo ora il prolungamento per periodicit  della  $F_x(\omega)$ ; precisamente, visto che l'intervallo  $[-2\pi W, 2\pi W]$  ha ampiezza  $4\pi W$ , trasliamo la funzione sull'intervallo  $[2\pi W, 6\pi W]$ , poi sull'intervallo  $[6\pi W, 10\pi W]$ , e cos  via, e facciamo la stessa cosa anche a sinistra, traslando la funzione su  $[-6\pi W, -2\pi W]$ , su  $[-10\pi W, -6\pi W]$ , ecc.; si ottiene cos  una funzione  $Q(\omega)$  definita su  $\mathbb{R}$  di periodo  $4\pi W$ :



Ora determiniamo lo sviluppo in serie di Fourier di  $Q(\omega)$ . A tale scopo, ricordiamo che se  $x(t)$    una funzione del tempo di periodo  $T$ , si pu  scrivere la relativa serie di Fourier nella forma (3.10),

cio   $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$ , dove il coefficiente  $c_n$    dato per ogni  $n$  intero dalla formula

$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-in\omega_0 t} dt$  (come   noto, il termine  $\omega_0$    uguale a  $\frac{2\pi}{T}$ ). Nel nostro caso, stiamo

considerando una funzione della variabile  $\omega$  di periodo  $4\pi W$ : perci , al posto di  $\omega_0$  dovremo scrivere  $\frac{2\pi}{4\pi W} = \frac{1}{2W}$ , col risultato che la  $Q(\omega)$  si potr  esprimere come

$$Q(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\omega}{2W}}, \quad (11.14)$$

dove il coefficiente  $c_n$    dato dalla formula

$$c_n = \frac{1}{4\pi W} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} Q(\omega) e^{-in\frac{\omega}{2W}} d\omega. \quad (11.15)$$

Consideriamo ora che  $x(t)$    l'antitrasformata di Fourier di  $F_x(\omega)$ ; si ha cio 

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (11.16)$$

In particolare, ponendo nella (11.16) il valore  $-n\Delta t$  al posto di  $t$ , essa diventa

$$x(-n\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F_x(\omega) e^{-in\omega\Delta t} d\omega. \quad (11.17)$$

Si osservi che la (11.17) fornisce un numero e non una funzione, perch  l'abbiamo ricavata sostituendo nella (11.16) al posto di  $t$  un valore particolare, cio  un preciso istante di tempo. Poich 

nell'intervallo  $[-2\pi W, 2\pi W]$  le funzioni  $F_x(\omega)$  e  $Q(\omega)$  coincidono, e poiché  $W = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t}$ , il confronto tra la (11.17) e la (11.15) porta all'uguaglianza

$$c_n = \frac{x(-n\Delta t)}{2W} = \Delta t \cdot x(-n\Delta t). \quad (11.18)$$

La (11.18) mette in relazione i coefficienti  $c_n$  dello sviluppo in serie di Fourier della trasformata  $F_x(\omega)$  con i valori della  $x$  nei multipli interi di  $\Delta t$ : data la corrispondenza biunivoca tra funzione e trasformata, questo mostra appunto che la  $x$  è determinata in maniera univoca.

Per completare la dimostrazione, diamo anche in questo caso una formula esplicita per la funzione  $x$  a partire dai valori  $x(-n\Delta t)$ . A tale scopo, definiamo una funzione  $R_W(\omega)$  come segue:

$$R_W(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } |\omega| \leq 2\pi W \\ 0 & \text{per } |\omega| > 2\pi W; \end{cases} \quad (11.19)$$

(in effetti, la  $R$  non è altro che una "rect", che però vale 1 in  $[-2\pi W, 2\pi W]$  anziché in  $[-W, W]$ ). Allora la  $F_x(\omega)$  si può esprimere come  $Q(\omega) \cdot R_W(\omega)$ , per cui, grazie alle (11.14) e (11.18), si può scrivere

$$F_x(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\omega}{2W}} R_W(\omega) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n\Delta t) e^{in\omega\Delta t} R_W(\omega). \quad (11.20)$$

Per la linearità dell'antitrasformata di Fourier, possiamo allora ottenere  $x(t)$  calcolando la serie delle antitrasformate. Ponendo  $k = -n$  (ovviamente anche  $k$  varierà da  $-\infty$  a  $+\infty$ ), osserviamo che l'antitrasformata di  $e^{in\omega\Delta t} R_W(\omega)$  è uguale a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{in\omega\Delta t} R_W(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} e^{in\omega\Delta t} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} e^{i\omega(t-k\Delta t)} d\omega = \\ & = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{i\omega(t-k\Delta t)}}{i(t-k\Delta t)} \right]_{-2\pi W}^{2\pi W} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{2\pi i W(t-k\Delta t)} - e^{-2\pi i W(t-k\Delta t)}}{i(t-k\Delta t)} = \frac{\text{sen} \frac{\pi}{\Delta t} (t-k\Delta t)}{\pi(t-k\Delta t)} = \frac{\text{sen} \left( \frac{\pi t}{\Delta t} - k\pi \right)}{\pi(t-k\Delta t)}, \end{aligned}$$

pertanto dalla (11.20) si ottiene

$$x(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\text{sen} \left( \frac{\pi t}{\Delta t} - k\pi \right)}{\pi(t-k\Delta t)},$$

cioè appunto una serie di funzioni sinc.  $\square$