ST1 - II Esonero: 6-6-2006

E. Scoppola

Esercizio 1

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale da

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

1) Dimostrare che le seguenti statistiche $\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_4$ sono stimatori non distorti di θ e calcolarne gli errori quadratici medi relativi $MSE(\hat{\theta}_i)$

$$\hat{\theta}_1 = X_1, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad \hat{\theta}_3 = \frac{X_1 + 2X_2}{3}, \quad \hat{\theta}_4 = \bar{X}$$

2) Dimostrare che $\hat{\theta}_4$ è una statistica sufficiente e trovare un UMVUE per θ.

3) Trovare un UMVUE per $var(X_i)$

Esercizio 2

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale dalla distribuzione normale con media μ e varianza 25.

1) Applica il metodo pivotale per trovare un intervallo di confidenza per μ al 90 per cento.

2) Quanto deve essere grande il campione per avere che l'ampiezza di questo intervallo è minore di 1?

Esercizio 3

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale estratto da una Poissoniana di parametro λ.

1) Trovare il test più potente di ampiezza α per $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contro $H_1 : \lambda = \lambda_1$ con $\lambda_0 < \lambda_1$.

2) E' uniformemente più potente per $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contro $H_1 : \lambda > \lambda_1$?

3) Come cambia il test nel caso $\lambda_0 > \lambda_1$?