

Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Tutorato n.1 del 9/3/2006

Esercizio 1. Siano X e Y due variabili casuali indipendenti che assumono valori interi positivi, aventi funzione di distribuzione $f(x) = 2^{-x}$ per $x=1, 2, \dots$. Trovare:

- (a) $\mathbb{P}(\min\{X, Y\} \leq x)$,
- (b) $\mathbb{P}(Y > X)$,
- (c) $\mathbb{P}(X = Y)$,
- (d) $\mathbb{P}(X \geq kY)$, per k intero positivo dato.

Esercizio 2. Sia N un numero casuale di monete, dove $N \sim Po(\lambda)$. Lanciamo ciascuna moneta una volta, uscirà testa con probabilità p ogni volta. Far vedere che in numero totale di teste $S \sim Po(\lambda p)$.

Esercizio 3. Mostrare le seguenti:

- (a) $\mathbb{E}(aY + bZ|X) = a\mathbb{E}(Y|X) + b\mathbb{E}(Z|X)$ con $a, b \in \mathbb{R}$,
- (b) se X e Y sono indipendenti allora $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$.

Esercizio 4. Siano X e Y variabili casuali aventi funzione di densità congiunta $f(x, y) = cx(y - x)e^{-y}$, $0 \leq x \leq y < +\infty$.

- (a) Trovare c .
- (b) Mostrare che:

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= 6x(y - x)y^{-3}, & 0 \leq x \leq y. \\ f_{Y|X}(y|x) &= (y - x)e^{x-y}, & 0 \leq x \leq y < +\infty. \end{aligned}$$

- (c) Dedurre che $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{1}{2}Y$ e $\mathbb{E}(Y|X) = X + 2$.

Esercizio 5. Sia $X \sim Po(\lambda)$. Trovare la funzione generatrice dei momenti di X e quindi media e varianza. Siano, poi, $X_1, X_2, \dots, X_n \sim Po(\lambda)$ i.i.d., dimostrare che $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim Po(n\lambda)$.

Esercizio 6. Sia $X \sim Esp(\lambda)$, trovare la funzione generatrice dei momenti di X e quindi media e varianza.