ASPETTI QUALITATIVI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

(Schema del contenuto delle lezioni e riferimenti bibliografici)

Testi

- [HS] M. Hirsch and S. Smale " Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra" Academic Press (1974)

1 Punti di equilibrio e stabilità: definizioni

Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione C^1, e $t \in \mathbb{R}$. Si consideri *l'equazione differenziale*:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} := \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

e denotiamo con $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ la sua *soluzione con dato iniziale* $\mathbf{x}_0$ cioè la funzione che soddisfa $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ (Vd per esempio [HS] cap.8 per la teoria generale delle equazioni differenziali, esistenza e unicità delle soluzioni, dipendenza continua dai dati iniziali). Denoteremo questa soluzione anche con $\Phi_t\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}(t)$ per mettere in evidenza la sua dipendenza dal dato iniziale.

Definizione

Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ è un *punto di equilibrio* di (1) se $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Se $\mathbf{x}_0$ è un punto di equilibrio allora chiaramente la funzione costante $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ è una soluzione di (1) .

Definizione

Un punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ è *stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $\mathbf{x}$ tale che $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ abbiamo che $|\Phi_t\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon$ per ogni $t \geq 0$. Denotando con $B_r(\mathbf{x}_0)$ un intorno di raggio r del punto $\mathbf{x}_0$, questo equivale a dire che le soluzioni che partono da $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ restano in $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ per ogni tempo $t \geq 0$.

Un punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ è *instabile* se non è stabile.

Un punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ è *asintoticamente stabile* se è stabile e inoltre per ogni $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ vale $\lim_{t\to\infty} |\Phi_t\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = 0$.

Per esempi vd. [HS] cap. 9.

2 Il caso lineare

Nel caso lineare, cioè quando $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con A matrice $n \times n$, l'equazione (1) si risolve esattamente $\Phi_t \mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{x}$ (vd. per es [HS] cap. 5). L'origine $\mathbf{0}$ è un punto di equilibrio la cui stabilità è legata al segno della parte reale degli autovalori della matrice A dal seguente risultato:

Theorem 2.1 *Se per ogni autovalore λ_i della matrice A vale che $\mathcal{R}e\lambda_i < -b$ con $b > 0$ allora il flusso $\Phi_t = e^{tA}$ è una contrazione:*

$$|\Phi_t \mathbf{x}| < e^{-tb}|\mathbf{x}|$$

per ogni $t > 0$ e per ogni $\mathbf{x}$ e dunque $\mathbf{0}$ è asintoticamente stabile.

Se esiste un autovalore λ_i della matrice A tale che $\mathcal{R}e\lambda_i > 0$ allora $\mathbf{0}$ è instabile.

(Vd. [HS] cap 7, (dimostrazione solo della contrazione))

3 Approssimazione lineare

Nel caso generale $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio, si può considerare l'approssimazione lineare del campo di velocità $\mathbf{f}$ intorno al punto $\mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{x}) \tag{2}$$

con $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ la matrice delle derivate di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$ (o *matrice di linearizzazione*) cioè:

$$\Big(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\Big)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{\mathbf{x}_0}$$

ed $\mathbf{R}$ il resto per cui vale:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{|\mathbf{R}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

L'equazione linearizzata diventa:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \qquad \text{con } A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

Vale il seguente risultato:

Theorem 3.1 *Sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio di $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, e sia $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ la matrice di linearizzazione di $\mathbf{f}$ intorno al punto $\mathbf{x}_0$. Se per ogni autovalore λ_i della matrice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ vale che $\mathcal{R}e\lambda_i < -b$ con $b > 0$ allora il flusso Φ_t è una contrazione in un opportuno intorno U di $\mathbf{x}_0$:*

$$\forall \mathbf{x} \in U: \quad \Phi_t \mathbf{x} \in U \qquad e \qquad |\Phi_t \mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < e^{-tb}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$$

per ogni $t > 0$ e dunque $\mathbf{x}_0$ è asintoticamente stabile.

Se esiste un autovalore λ_i della matrice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tale che $\mathcal{R}e\lambda_i > 0$ allora $\mathbf{x}_0$ è instabile.

(vd [HS] cap 9 e in particolare i teoremi di pg 181 e pg 197 (senza dimostrazione))

4 Teorema di Liapunov

Nel caso in cui non si può applicare il precedente risultato, la stabilità può essere studiata con l'uso del teorema di Liapunov.

Definizione

Data una funzione $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ almeno C^1 ed il sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, si definisce *derivata sostanziale* di W l'espressione

$$\dot{W} \equiv \frac{dW}{dt} := \frac{d}{dt} W(\mathbf{x}(t)) = (\nabla W, \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}(t)).$$

Se $\dot{W} = 0$ allora la quantità W è una *costante del moto* o *integrale primo.*

Definizione

Dato un sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, ed un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definiamo l'*insieme ω-limite di* $\mathbf{x}$:

$$L_\omega(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \text{ esiste una successione infinita crescente } t_1 < t_2 < ... < t_k < ... \text{ tale che } \lim_{k\to\infty} |\Phi_{t_k}\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 0\}$$

Definizione

Dato un sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, sia $\mathbf{x}_0$ un suo punto di equilibrio. Se esite un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di $\mathbf{x}_0$ ed una funzione $W : U \to \mathbb{R}$ che sia C^1 e tale che

i) $W(\mathbf{x}_0) = 0$ e $W(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U \backslash \mathbf{x}_0$

ii) $\dot{W}(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U$

allora la funzione W è una *funzione di Liapunov* per $\mathbf{x}_0$.

Se alla condizione ii) si sostituisce la condizione

ii') $\dot{W}(\mathbf{x}) < 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U \backslash \mathbf{x}_0$

allora la funzione W è una *funzione di Liapunov stretta* per $\mathbf{x}_0$.

Theorem 4.1 *Dato un sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, sia $\mathbf{x}_0$ un suo punto di equilibrio. Se esite un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di $\mathbf{x}_0$ ed una funzione di Liapunov per $\mathbf{x}_0$ allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di equilibrio stabile. Se la funzione di Liapunov è stretta allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.*

Vd. esempi e dimostrazione in [HS] pg.193-195

5 Esempio

Si consideri un sistema meccanico unidimensionale, cioè un punto materiale in una dimensione soggetto ad una forza $F(x) = -V'(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. L'equazione del moto del punto può essere scritta nello spazio delle fasi nella forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{V'(x)}{m} \end{aligned}$$

dove un punto dello spazio delle fasi (x, v) può essere denotato equivalentemente con $(x, \dot{x})$. I punti di equilibrio sono i punti dello spazio fasi $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico di V, cioè tale che $V'(x_0) = 0$.

La matrice di linearizzazione di questo sistema dinamico intorno al punto $(x_0, 0)$ è data da

$$Df(x_0, 0) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{V"(x_0)}{m} & 0 \end{array} \right) \tag{3}$$

Se x_0 è un punto di massimo della funzione $V(x)$ con $V"(x_0) < 0$ allora la matrice di linearizzazione $Df(x_0, 0)$ ha autovalori reali di segno opposto e dunque un autovalore strettamente positivo e dunque il punto di equilibrio è instabile. Se x_0 è un punto di minimo della funzione $V(x)$ con $V"(x_0) > 0$ allora $Df(x_0, 0)$ ha autovalori immaginari puri e dunque non si può concludere nulla da essa sulla stabilità del punto $(x_0, 0)$. Se si definisce la funzione energia totale sullo spazio delle fasi:

$$H(x, v) := \frac{1}{2}mv^2 + V(x) \tag{4}$$

è immediato verificare che la sua derivata sostanziale è nulla:

$$\dot{H}(x, v) = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial v}\dot{v} = V'(x)v + mv(-\frac{V'(x)}{m}) = 0 \tag{5}$$

dunque l'energia totale è una quantità conservata.

Se x_0 è un punto di minimo isolato della funzione $V(x)$ allora la funzione

$$W(x, v) = H(x, v) - V(x_0) \tag{6}$$

è una funzione di Liapunov in un opportuno intorno di x_0. Dal teorema di Liapunov si può dunque concludere che il punto $(x_0, 0)$ è stabile.

Osservazione

L'esempio che abbiamo considerato in una dimensione può essere considerato anche in più dimensioni per forze conservative e tutte le dimostrazioni delle affermazioni fatte possono essere immediatamente estese al caso multidimensionale. In particolare come corollario del teorema di Liapunov e conseguenza della conservazione dell'energia totale del sistema si ottiene:

Theorem 5.1 *(di Lagrange) In un sistema conservativo i punti di minimo isolati dell'energia potenziale corrispondono a punti di equilibrio stabile.*