Equazioni differenziali lineari e oscillatori

A.Gaudillière

1 Equazioni differenziali lineari

1.1 Equazione omogenea

Un'e.d.l. è un'equazione d'incognita $\mathbf{x} : I \longrightarrow E = \mathbb{K}^n$ (I intervallo di $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) della forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \qquad \forall t \in I \tag{1.1}$$

dove A e $\mathbf{b}$ sono delle funzioni su I a valori in $M_n(\mathbb{K})$ e $\mathbb{K}^n$.

Se A e $\mathbf{b}$ sono continue il teorema di Cauchy-Lipschitz *lineare* dà, per ogni $t_0 \in I$ e $\mathbf{x}_0$ in E, l'esistenza e l'unicità di souluzioni *globali* (definite sull'*intero* intervallo I) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Supponiamo adesso che $\tilde{\mathbf{x}}$ sia una soluzione particolare di (1.1). L'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni di (1.1) è l'insieme delle funzioni $\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{y}$ con

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \dot{\mathbf{y}} = A\tilde{\mathbf{x}} + A\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

i.e., $\mathbf{y}$ soluzione di

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}. \tag{1.2}$$

(1.2) è chiamata *equazione omogenea* associata a (1.1).

In altre parole, se $\mathcal{S}_0$ è lo spazio vettoriale delle soluzioni di (1.2), allora

$$\mathcal{S} = \tilde{\mathbf{x}} + \mathcal{S}_0.$$

Per risolvere (1.1) si tratta quindi di trovare una soluzione particolare $\tilde{\mathbf{x}}$ e di risolvere l'equazione omogenea 1.2.

1.2 Equazioni in dimensione 1 o a coefficienti costanti

Se $n = 1$ o A è costante, l'equazione (1.1) con condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ dà, per ogni $t \in I$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) - A(t)\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}(t) \\ \underbrace{e^{-\mathcal{A}(t)}\dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-\mathcal{A}(t)}A(t)\mathbf{x}(t)}_{\frac{d}{dt}\left(e^{-\mathcal{A}(t)}\mathbf{x}(t)\right)} &= e^{-\mathcal{A}(t)}\mathbf{b}(t) \end{aligned}$$

con

$$\mathcal{A}(t) := \int_{t_0}^{t} A(s)ds \qquad \Big(\text{se } A \text{ è costante allora } \mathcal{A}(t) = (t-t_0)A\Big)$$

e, integrando tra t_0 e t,

$$e^{-\mathcal{A}(t)}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t} e^{-\mathcal{A}(s)}\mathbf{b}(s)ds$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathcal{A}(t)}\mathbf{x}_0 + e^{\mathcal{A}(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-\mathcal{A}(s)}\mathbf{b}(s)ds. \tag{1.3}$$

Osservazione: Nel caso A costante ritroviamo

$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0 :\ \mathbf{x}_0 \in E\right\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{S} = \tilde{\mathbf{x}} + \mathcal{S}_0.$$

Esempio: Il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{x}}{t} + \dfrac{1}{t^2} \\ \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_1 \end{cases}$$

ha per unica soluzione su $\mathbb{R}_+$ la funzione che a ogni $t > 0$ associa

$$\mathbf{x}(t) \ = \ e^{-\ln t}\mathbf{x}_1 + e^{-\ln t} \int_1^t \frac{e^{-\ln s}}{s^2} ds \ = \ \frac{\mathbf{x}_1 + \ln t}{t}\ .$$

Osservazione: la formula può anche essere utilizzata come semplice *guida* nella ricerca delle soluzioni.

2 Oscillatore armonico forzato e smorzato

2.1 Equazione del moto

Si considera un punto materiale di massa m che si muove orizzontalmente sotto l'azione di tre forze al punto x:

i) una forza di richiamo $-kx$ con $k > 0$,

ii) una forza periodica f di periodo T,

iii) una forza d'attrito fluido $-\alpha\dot{x}$ con $\alpha \geq 0$.

L'equazione del moto è

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + f$$

oppure

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \tag{2.1}$$

con $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$, o ancora, con $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$,

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\frac{\alpha}{m} \end{pmatrix}}_{A \text{ costante}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{m} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b} \text{ periodica}} \tag{2.2}$$

Abbiamo

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{y}$$

dove $\tilde{\mathbf{x}}$ è una soluzione particolare e $\mathbf{y}$ una soluzione dell'equazione omogenea.

2.2 Soluzione dell'equazione omogenea

La soluzione di $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ che vale $\mathbf{y}_0$ in $t = 0$ è $t \mapsto e^{tA}\mathbf{y}_0$. Gli autovalori di A sono le soluzioni di

$$\det(A - XI) \ = \ \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -\omega_0^2 & -\frac{\alpha}{m} - X \end{vmatrix} \ = \ X^2 + \frac{\alpha}{m}X + \omega_0^2 \ = \ 0.$$

Con $\Delta := (\frac{\alpha}{m})^2 - 4\omega_0^2$ abbiamo tre casi:

i) se $\Delta < 0$, i.e., $\frac{\alpha}{m} < 2\omega_0$, allora gli autovalori di A sono $\lambda_\pm := -\frac{\alpha}{2m} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\alpha}{2m})^2}$, le componenti y e $\dot{y}$ di $e^{tA}\mathbf{y}_0$ sono combinazioni lineari di $e^{t\lambda_+}$ e $e^{t\lambda_-}$, sicché

$$y(t) = e^{-\frac{\alpha}{2m}t}.C\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} + \varphi\right)$$

per qualche C e φ in $\mathbb{R}_+$,

ii) se $\Delta = 0$, i.e., $\frac{\alpha}{m} = 2\omega_0$, allora gli autovalori di A coincidono in $-\frac{\alpha}{2m}$, le componenti di $e^{tA}\mathbf{y}_0$ sono combinazioni lineari di $e^{-\frac{\alpha}{2m}t}$ e $te^{-\frac{\alpha}{2m}t}$, e

$$y(t) = e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\,(C_1 + C_2 t)$$

per qualche C_1 e C_2 in $\mathbb{R}$,

iii) se $\Delta > 0$, i.e., $\frac{\alpha}{m} > 2\omega_0$, allora gli autovalori di A sono $-\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{(\frac{\alpha}{2m})^2 - \omega_0^2}$, e

$$y(t) = C_1 e^{-\left(\frac{\alpha}{2m} - \sqrt{(\frac{\alpha}{2m})^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\frac{\alpha}{2m} + \sqrt{(\frac{\alpha}{2m})^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

per qualche C_1 e C_2 in $\mathbb{R}$.

2.3 Ricerca della soluzione particolare

Cerchiamo una soluzione di

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{m} \end{pmatrix}$$

con f periodica.

Utiliziamo:

Teorema 1 (Fourier) *Sia g una funzione T-periodica di classe C^k con $k \geq 2$. Con, per ogni $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\hat{g}_n := \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-\frac{2i\pi}{T} nt} dt$$

abbiamo

$$\lim_{|n| \to +\infty} |n|^k |\hat{g}_n| = 0$$

e, per ogni t,

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}_n e^{\frac{2i\pi}{T} nt}$$

con convergenza normale della seria.

Da ora in poi supporemo che f è C^2. Se troviamo, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $\tilde{\mathbf{x}}_n$ t.c.

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_n = A\tilde{\mathbf{x}}_n + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\hat{f}_n}{m} e^{\frac{2i\pi}{T} nt} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_n(t)} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

allora per linearità avremo

$$\tilde{\mathbf{x}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathbf{x}}_n$$

soluzione di $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ purché $\sum \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_n$ converga uniformamente. Siccome $\sum \mathbf{b}_n$ converge normalmente e A è continua, basterà la convergenza uniforme di $\sum \mathbf{x}_n$ (vedi (2.3)).

(2.3) dà, per ogni t

$$\mathbf{x}_n(t) = e^{tA}\mathbf{x}_n(0) + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\hat{f}_n}{m} e^{\frac{2i\pi}{T} ns} \end{pmatrix} ds.$$

Riscrivendo quest'equazione in una base dove A trigonalizza si vede (al meno nel caso $\Delta \neq 0$) che se $\alpha > 0$ o $\omega_0 \neq |\frac{2\pi}{T} n|$ esiste una soluzione della forma $c_n e^{\frac{2i\pi}{T} nt}$, mentre se $\alpha = 0$ e $\omega_0 = |\frac{2\pi}{T} n|$ esiste una soluzione della forma $c_n t e^{\frac{2i\pi}{T} nt}$.

Nel primo caso (caso non risonante) si trova, risolvendo (2.1):

$$c_n := \frac{\hat{f}_n}{m\left(\omega^2 + \frac{\alpha}{m}\frac{2i\pi}{T} n - \left(\frac{2\pi}{T} n\right)^2\right)}$$

e il teorema di Fourier assicura la convergenza della seria che definisce la soluzione particolare

$$\tilde{x}(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2i\pi}{T}nt} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha = 0$ **ed esiste** $n_0 \in \mathbb{N}$ **t.c.** $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}n_0$ **(caso risonante)** si trova, risolvendo (2.1):

$$c_n = \frac{\hat{f}_n}{m\left(\omega^2 - \left(\frac{2\pi}{T}n\right)^2\right)} \qquad \text{per } n \neq \pm n_0$$

e

$$c_n = \frac{\hat{f}_n}{m\frac{4i\pi}{T}n} \qquad \text{per } n = \pm n_0$$

sicché

$$\tilde{x}(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-n_0;n_0\}} c_n e^{\frac{2i\pi}{T}nt} + 2t\mathrm{Re}\left\{\frac{\hat{f}_{n_0}}{2i\omega_0 m}e^{i\omega_0 T}\right\} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

è una soluzione particolare. **Nel caso risonante la soluzione diverge nel tempo.**

3 La formula di Liouville

Consideriamo un sistema lineare su $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$$

e denotiamo $t \mapsto \Phi_t(\mathbf{x}_0)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

È immediato verificare che, per ogni λ, μ in $\mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}'_0$ in $\mathbb{R}^n$

$$\Phi_t(\lambda\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{x}'_0) = \lambda\Phi_t(\mathbf{x}_0) + \mu\Phi_t(\mathbf{x}'_0) \quad \forall t.$$

Per ogni t, Φ_t è quindi un'applicazione lineare su $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^n$. È anche iniettiva (e quindi biettiva visto che opera su uno spazio di dimensione finita): se $\Phi_{t_1}(\mathbf{x}_0) = \Phi_{t_1}(\mathbf{x}'_0) = \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'_0$ per unicità della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 \end{cases}$$

Per ogni t, Φ_t appartienne a $gl_n(\mathbb{R})$, l'insieme degli automorfismi di $\mathbb{R}^n$. Definiamo adesso

$$W(t) := \det(\Phi_t).$$

Proposizione 3.0.1 (Liouville)

$$W(t) = \exp\left\{\int_0^t \mathrm{tr}\, A(s)ds\right\}$$

Prova: Calcoliamo la derivata di W. Abbiamo

$$D_tW = D_t(\det \circ \Phi) = D_{\Phi_t}(\det) \circ D_t(\Phi)$$

e quindi due differenziali da calcolare.

Iniziamo con $D_t(\Phi)$. Per ogni x_0 in $\mathbb{R}^n$, per ogni h in $\mathbb{R}$, abbiamo, in $\mathbb{R}^n$:

$$\Phi_{t+h}(\mathbf{x}_0) = \Phi_t(\mathbf{x}_0) + hA(t)\Phi_t(\mathbf{x}_0) + |h|\epsilon_{\mathbf{x}_0}(h)$$

con $\lim_{h\to 0} \epsilon_{\mathbf{x}_0}(h) = 0$. Applicando la formula a $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ i vettori di una base di $\mathbb{R}^n$ otteniamo, in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$:

$$\Phi_{t+h} = \Phi_t + hA(t)\Phi_t + |h|\epsilon(h)$$

con $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. Sicché:

$$D_t\Phi : h \in \mathbb{R} \longmapsto hA(t)\Phi_t \in \mathcal{L}(R^n). \tag{3.1}$$

Calcoliamo adesso, per $A \in GL_n(\mathbb{R})$ il differenziale del determinante in A. Per ogni $H \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \det(A+H) &= \det(A(I + A^{-1}H)) \\ &= \det(A)\det(I + A^{-1}H) \end{aligned}$$

Scrivendo l'ultimo determinante come somma sulle permutazioni in $\mathcal{S}_n$ si ottienne

$$\begin{aligned} \det(A+H) &= \det(A)(1 + \mathrm{tr}\,(A^{-1}H) + \|H\|\epsilon(H)) \\ &= \det(A) + \det(A)\mathrm{tr}\,(A^{-1}H) + \|H\|\epsilon'(H) \end{aligned}$$

con $\lim_{H\to 0} \epsilon(H) = \lim_{H\to 0} \epsilon'(H) = 0$. Sicché

$$D_A(\det) : H \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto \det(A)\mathrm{tr}\,(A^{-1}H) \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Quindi, per $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D_tW(h) &= \det(\Phi_t)\mathrm{tr}\,(\Phi_t^{-1}hA(t)\Phi_t) \\ &= \det(\Phi_t)\mathrm{tr}\,(hA(t)\Phi_t\Phi_t^{-1}) \\ &= \det(\Phi_t)\mathrm{tr}\,(hA(t)) \\ &= h\mathrm{tr}\,(A(t))\det(\Phi_t) \\ &= h\mathrm{tr}\,(A(t))W(t) \end{aligned}$$

In altre parole

$$\frac{dW}{dt} = \mathrm{tr}\,(A(t))W(t).$$

La risoluzione di quest'equazione differenziale lineare in dimensione 1 dà, per ogni t:

$$W(t) = \exp\left\{\int_0^t \mathrm{tr}\,A(s)ds\right\} W(0)$$

Siccome
$$W(0) = \det(\Phi_0) = \det(id) = 1$$
arriviamo a
$$W(t) = \exp\left\{\int_0^t \operatorname{tr} A(s)ds\right\}$$
$\square$

In particolare, se $\operatorname{tr} A(t) \equiv 0$ allora $\det(\Phi_t) \equiv 1$.

4 Risonanza parametrica: l'altalena

4.1 Equazione del moto

Se il "conducente" di un'altalena non si muove rispetto all'altalena, il movimento è governato dall'equazione del pendolo

$$\ddot{\theta} + \sqrt{\frac{g}{l}} \sin\theta = 0$$

con θ l'angolo tra le corde e la verticale e l la distanza dell'asse al centro di massa. L'equazione si approssima per θ piccolo in

$$\ddot{\theta} + \sqrt{\frac{g}{l}}\theta = 0.$$

Se il conducente sposta il suo centro di massa piegando e stendendo le gambe il sistema si può modellizzare con l'equazione:

$$\ddot{\theta} + \omega^2(t)\theta = 0$$

i.e., introducendo $\mathbf{x} := \binom{\theta}{\dot{\theta}}$,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}}_{A(t)} \mathbf{x}.$$

Supponiamo ω periodica di periodo T.

4.2 Applicazione su un periodo

Se a $t = 0$ il sistema è in $\mathbf{x}_0$, dopo il tempo T sarà in $\Phi_T(\mathbf{x}_0)$. Siccome A è T-periodico dopo il tempo $2T$ sarà in $\Phi_T(\Phi_T(\mathbf{x}_0))$, e dopo nT in $\Phi_T^n(\mathbf{x}_0)$.

Φ_T si chiama *applicazione su un periodo.* Come evolve $(\Phi_T^n)_{n\geq 0}$?

Gli autovalori di Φ_T hanno somma $\operatorname{tr}\Phi_T$ e prodotto $\det(\Phi_T) = 1$ per la formula di Liouville. Sono soluzioni di
$$X^2 - \operatorname{tr}(\Phi_T)X + 1 = 0$$
equazione di discriminante $\Delta := (\operatorname{tr}(\Phi_T))^2 - 4$.

Se $\Delta < 0$, i.e. $|\mathrm{tr}\,(\Phi_T)| < 2$, gli autovalori sono complessi distinti e coniugati. Φ_T è equivalente a una rotazione.

Se $\Delta > 0$, i.e. $|\mathrm{tr}\,(\Phi_T)| > 2$, Φ_T ha due autovalori reali distinti. Uno di questi ha quindi un modulo strettamente maggiore di 1, e $(\Phi_T^n)_{n\geq 0}$ diverge.

Esiste $\omega : t \mapsto \omega(t)$ tale che $|\mathrm{tr}\,\Phi_T| > 2$?

4.3 ω quasi costante

Cerchiamo di rispondere alla domanda nel caso

$$\omega(t) = \omega_0 + \epsilon a(t) \quad \forall t$$

con a data periodica di periodo T e tale che

$$\sup_{t\in[0;T]} |a(t)| = 1.$$

Calcolo di Φ_T nel caso $\epsilon = 0$

Per dare una rappresentazione matriciale di Φ_T basta calcolare le imagini via Φ_T dei vettori della base canonica, i.e. calcolare $\Phi_T \mathbf{x}_0$ per $\mathbf{x}_0 = \binom{\theta_0}{\dot\theta_0} = \binom{1}{0}, \binom{0}{1}$. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot\theta + \omega_0^2 = 0 \\ \theta(0) = 1 \quad \dot\theta(0) = 0 \end{cases}$$

è $t \mapsto \cos\omega_0 t$, e la soluzione di

$$\begin{cases} \ddot\theta + \omega_0^2 = 0 \\ \theta(0) = 0 \quad \dot\theta(0) = 1 \end{cases}$$

è $t \mapsto \frac{1}{\omega_o}\sin\omega_0 T$. Sicché, nella base canonica,

$$\phi_T = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 T & \frac{1}{\omega_o}\sin\omega_0 T \\ -\omega_0\sin\omega_0 T & \cos\omega_0 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathrm{tr}\,\Phi_T = |2\cos\omega_0 T| \begin{cases} = 2 & \text{se } \omega_0 \in \frac{\pi}{T}\mathbb{N}, \\ < 2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È possibile $\mathrm{tr}\,\Phi_T > 2$ per $\epsilon > 0$?

L'insieme

$$U := \left\{(\omega_0, \epsilon) \in R_+^2 :\ |\mathrm{tr}\,\Phi_T| < 2\right\}$$

è un aperto di $\mathbb{R}_+^2$. Quindi, se $\omega_0 \notin \frac{\pi}{T}\mathbb{N}$, i.e. se T non è un multiplo del mezzo-periodo del sistema non perturbato ($\epsilon = 0$), non c'è speranza che delle piccole oscillazioni rendino instabile la posizione d'equilibrio dell'altalena.

Invece se

$$\omega_0 = \omega_k := k\frac{\pi}{T} \tag{4.1}$$

per $k \in \mathbb{N}$ allora siamo sulla frontiera di U. E si può mostrare che

$$V := \left\{ (\omega_0, \epsilon) \in R^2_+ : \ |\mathrm{tr}\, \Phi_T| > 2 \right\}$$

va a sfiorare l'asse ($\epsilon = 0$) in ω_k, $k = 1, 2, \ldots$ ad esempio con a costante a tratti di lunghezza $T/2$ e a valori in $\{-1; 1\}$ (vedi Arnold). Delle piccole oscillazioni del conducente mandano l'altalena fuori dal regime θ piccolo se (4.1) è soddisfatta.