

Compito d'esame del 1° Luglio 1998
Primo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto all'azione di una forza conservativa di energia potenziale:

$$V(x) = (1 + x^2)(x^2 - \alpha) \quad (1)$$

dove α è un parametro reale.

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema in funzione del parametro α e discuterne la stabilità al variare di α .
2. Tracciare le curve di livello nello spazio (x, y) , $y = \dot{x}$.
3. Individuare al variare di α i dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.
4. Per $\alpha = 2$ determinare il moto con dati iniziali $(x_0, y_0) \equiv (x_0, \dot{x}_0) = (1, 0)$ e specificare se la traiettoria corrispondente interseca l'asse $x = 0$.

Punto (1)

Cerchiamo i minimi stretti del potenziale:

$$V(x) = x^4 + (1 - \alpha)x^2 - \alpha \quad (2)$$

$$V'(x) = 2x[2x^2 + (1 - \alpha)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{\alpha-1}{2} \end{cases} \text{ se } \alpha > 1$$

$$V''(x) = 2(1 - \alpha) + 12x^2 \quad (3)$$

Distinguiamo tre casi (indichiamo con $x_0 = \sqrt{(\alpha - 1)/2}$):

(a) $\alpha < 1$:

$$V''(0) = 2(1 - \alpha) > 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{eq.stabile}$$

(b) $\alpha > 1$:

$$\begin{cases} V(0)'' < 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{eq.instabile} \\ V''(\pm x_0) = 4(\alpha - 1) > 0 \Rightarrow x = \pm x_0 \quad \text{eq.stabile} \end{cases}$$

(c) $\alpha = 1$: in tal caso il potenziale $V(x)$ diventa:

$$V(x) = x^4 - 1 \quad (4)$$

per cui $x = 0$ è un minimo isolato e quindi una posizione di equilibrio stabile.

Punti (2-3)

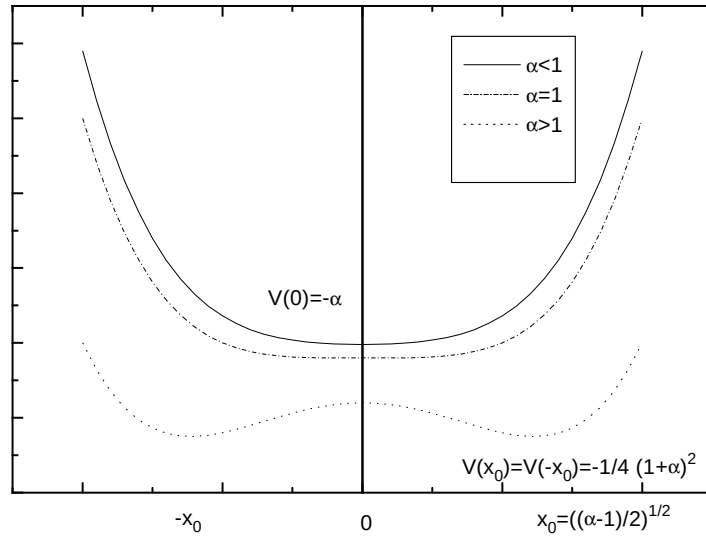


Figura 1: *Energia potenziale al variare di α .*

Le curve di livello corrispondenti ai tre casi del punto precedente sono rappresentate in Fig. 2-3. Si osservi che nel caso $\alpha > 1$ risulta:

$$V(\pm x_0) = -\frac{1}{4}(1 + \alpha)^2 < V(0) = -\alpha \quad (5)$$

in quanto è $(1 + \alpha)^2 > 4$. Ne segue che:

- se $\alpha \leq 1$ si hanno traiettorie periodiche per $\forall E > -\alpha$ (vedi Fig. 2);
- se $\alpha > 1$ si hanno traiettorie periodiche per $\forall E > -\frac{1}{4}(1 + \alpha)^2$, escluso il valore di $E = -\alpha$, per il quale si hanno due orbite separate dalla posizione di equilibrio instabile $x = 0$ (vedi Fig. 3).

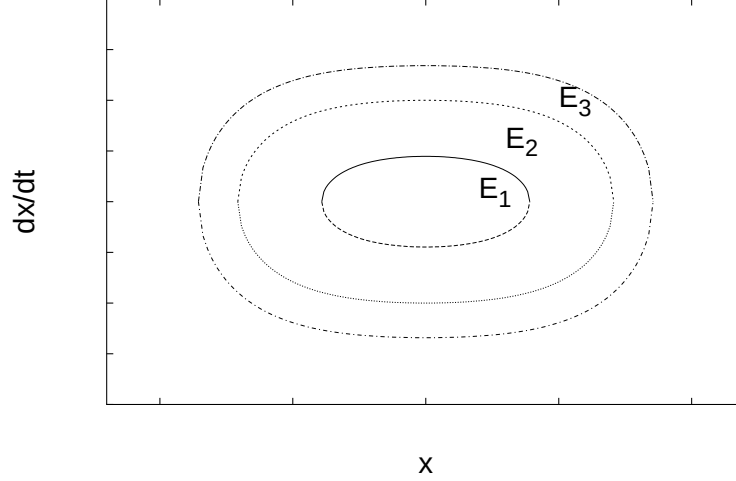


Figura 2: *Traiettorie nello spazio delle fasi per $\alpha \leq 1$ per tre valori dell'energia $E_1, E_2, E_3 > -\alpha$.*

Punto (4)

Per $\alpha = 2 > 1$ siamo nel caso (b): per i dati iniziali $x_0 = 1$ e $\dot{x}_0 = 0$ l'energia è pari a:

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = -2 \quad (6)$$

cioè è pari al valore per il quale ho orbite non periodiche. La traiettoria si muove sulla separatrice ad $E = -\alpha$ rappresentata in Fig. 3, individuata, tra le due possibili orbite ad $E = -2$ nel piano delle fasi:

$$\dot{x} = \sqrt{2(E - V(x))} = \pm \sqrt{2x^2(1 - x^2)} \quad (7)$$

da quella corrispondente alla determinazione negativa della radice (partendo dalla posizione $x_0 = 1$ il punto si muove verso posizioni $x < 1$, con velocità $\dot{x} < 0$). Integrando la (6) otteniamo la $x(t)$:

$$\int_1^{x(t)} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{2}t \quad (8)$$

Effettuando la sostituzione $\sqrt{1-x^2} = z \Rightarrow xdx = -zdz$, $x^2 = 1 - z^2$ nella precedente abbiamo:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dz}{1-z^2} =$$

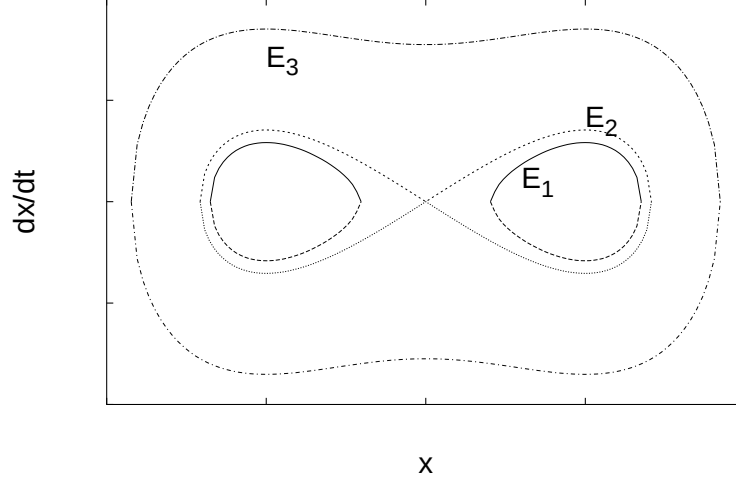


Figura 3: *Traiettorie nello spazio delle fasi per $\alpha > 1$ per tre valori dell'energia: $V(\pm x_0) < E_1 < -\alpha$, $E_2 = -\alpha$, $E_3 > -\alpha$.*

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1-z} = \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{1-z}{1+z} + c \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned} \tag{9}$$

e quindi, ponendo $u(t) = \sqrt{1-x^2(t)}$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \log \frac{1-u(t)}{1+u(t)} = -\sqrt{2}t \tag{10}$$

Invertendo la precedente si trova con facili passaggi:

$$\begin{aligned}
\frac{1-u}{1+u} &= \exp^{-2\sqrt{2}t} \equiv s \\
\Rightarrow u &= \frac{s-1}{s+1} = \sqrt{1-x^2} \\
\Rightarrow x^2 &= 1 - \left(\frac{s-1}{s+1} \right)^2 \\
\Rightarrow x &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{s-1}{s+1} \right)^2}
\end{aligned} \tag{11}$$

prendendo la determinazione positiva della radice (siamo sull'orbita ad $x > 0$) e ricordando che:

$$\frac{s-1}{s+1} = \frac{\exp^{-2\sqrt{2}t} - 1}{\exp^{-2\sqrt{2}t} + 1} = -\tanh(\sqrt{2}t) \quad (12)$$

In definitiva la traiettoria è data da:

$$x(t) = \sqrt{1 - \tanh^2(\sqrt{2}t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (13)$$

per cui il moto di dati iniziali $(1, 0)$ non arriverà mai nel punto $x = 0$, se non asintoticamente.