Compito d'esame del 1° Luglio 1998
Secondo Esercizio

Un sistema meccanico è costituito da due punti P_1 e P_2, di massa $m_1 = m_2 = 1$ e vincolati a muoversi lungo una guida posta in un piano verticale π. Introducendo in π un sistema di coordinate (x, y), la guida risulta definita dall'equazione $y = x^2$, e i due punti individuati dalle coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) rispettivamente.

Sul sistema agisce la forza peso (sia g la costante di gravità). Inoltre il piano π ruota con velocità angolare uniforme ω.

Si studino le tre seguenti configurazioni:

(a) Il punto P_2 è fisso nell'origine ed il punto P_1 è mobile e collegato all'asse verticale $x = 0$ da una molla di costante elastica k.

(b) Il punto P_2 è fisso nell'origine ed il punto P_1 è mobile e collegato all'asse orizzontale $y = 0$ da una molla di costante elastica k.

(c) I punti P_1 e P_2 sono mobili e collegati tra loro da una molla di costante elastica k.

1. Scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange nei tre casi sopra considerati.

2. Determinare le posizioni di equilibrio nei tre casi sopra considerati e discuterne la stabilità al variare della velocità angolare ω nei casi (a) e (b).

3. Discutere le piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile, ove possibile, in uno dei tre casi sopra considerati.

Punti (1)-(2)

Sui due punti materiali agiscono la forza peso, la forza (apparente) centrifuga dovuta alla rotazione del piano π, e la forza di richiamo elastica: si tratta di forze conservative di potenziali dati rispettivamente da $V_g = gy_{1,2}$, $V_{cf} = -\frac{1}{2}\omega^2 x_{1,2}^2$ e $V_{el} = \frac{1}{2}kd_{1,2}^2$ con $d_{1,2}$ distanza del punto $P_{1,2}$ dall'altro estremo della molla. L'energia cinetica è sempre pari (tenendo conto delle condizioni di vicolo $y_{1,2} = x_{1,2}^2$) a:

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 = \frac{1}{2}(1 + 4x_i^2)\dot{x}_i^2 \tag{1}$$

per cui, essendo il potenziale indipendente dalle velocità, le equazioni di Eulero-Lagrange (EEL) hanno la struttura generale:

$$
\begin{aligned}
EEL: \qquad & \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\
\Rightarrow \quad & (1+4x_i^2)\ddot{x} + 4x_i\dot{x}_i^2 + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

Analizziamo quindi i vari casi.

Caso a. Essendo il punto P_2 fermo nell'origine è $T_2 = V_2 = 0$. La Lagrangiana dipende dalla sola coordinata x del punto P_1:

$$
\begin{aligned}
V(x) &= gx^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \\
V'(x) &= x(2g + k - \omega^2) \\
V''(x) &= 2g + k - \omega^2
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
T = \frac{1}{2}(1+4x^2)\dot{x}^2 \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
EEL: \qquad & (1+4x^2)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 + V'(x) = 0 \\
& (1+4x^2)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 + x(2g + k - \omega^2) = 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

Per le configurazioni di equilibrio abbiamo dalla (3) che il solo punto di equilibrio è $x = 0$, e la sua natura dipende dal valore dei parametri:

- $\omega^2 < 2g + k \Rightarrow V''(0) > 0 \Rightarrow x = 0$ equilibrio stabile;
- $\omega^2 > 2g + k \Rightarrow V''(0) < 0 \Rightarrow x = 0$ equilibrio instabile;
- $\omega^2 = 2g + k \Rightarrow V \equiv 0$ identicamente, per cui ogni x è una posizione di equilibrio indifferente.

Caso b

La Lagrangiana dipende ancora dalla sola coordinata x del punto P_1:

$$
\begin{aligned}
V(x) &= gx^2 + \frac{1}{2}kx^4 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \\
V'(x) &= x(2g + kx^2 - \omega^2) \\
V''(x) &= 2g + k - \omega^2 + 6kx^2
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$T = \frac{1}{2}(1+4x^2)\dot{x}^2 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} EEL: \quad & (1+4x^2)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 + V'(x) = 0 \\ & (1+4x^2)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 + x(2g + kx^2 - \omega^2) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Per le posizioni di equilibrio, dalla (6) abbiamo che l'equazione $V(x) = 0$ ha soluzioni:

$$\begin{aligned} x &= 0 \qquad V''(0) = 2g - \omega^2 \\ x &= \pm x_0 \quad \text{con} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\omega^2 - 2g}{2k}}, V''(\pm x_0) = 2(\omega^2 - 2g) \quad \text{se} \quad \omega^2 > 2g \end{aligned} \tag{9}$$

A seconda dei valori dei parametri si ha:

- $\omega^2 < 2g \Rightarrow V''(0) > 0 \Rightarrow x = 0$ equilibrio stabile;
- $\omega^2 > 2g \Rightarrow V''(0) < 0, V''(\pm x_0) > 0 \Rightarrow x = 0$ equilibrio instabile, $x = \pm x_0$ equilibrio stabile;
- $\omega^2 = 2g \Rightarrow V \equiv \frac{1}{2}kx^4$ identicamente, per cui $x = 0$ è un minimo per $V(x)$ e quindi una posizione di equilibrio stabile.

Caso c

La Lagrangiana dipende stavolta dalle coordinate di entrambi i punti P_1 e P_2.

$$\begin{aligned} V(x) &= gx_1^2 + gx_2^2 + \frac{1}{2}k[(x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2] - \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} &= x_1(2g - \omega^2) + k(x_1 - x_2) + 2kx_1(x_1^2 - x_2^2) \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} &= x_2(2g - \omega^2) - k(x_1 - x_2) - 2kx_2(x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \tag{10}$$

$$T = \frac{1}{2}(1+4x_1^2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(1+4x_2^2)\dot{x}_2^2 \tag{11}$$

Secondo la (2) le EEL sono:

$$
\begin{aligned}
&(1+4x_1^2)\ddot{x}_1 + 4x_1\dot{x}_1^2 + x_1(2g-\omega^2) + k(x_1-x_2) + 2kx_1(x_1^2-x_2^2) = 0 \\
&(1+4x_2^2)\ddot{x}_2 + 4x_2\dot{x}_2^2 + x_2(2g-\omega^2) - k(x_1-x_2) + 2kx_2(x_1^2-x_2^2) = 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Per quanto riguarda i punti di equilibrio, dovremo trovare le soluzioni del sistema:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial V}{\partial x_2} &= 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Dalla Eq. (10), sottraendo membro a membro abbiamo che:

$$
\begin{aligned}
&(x_1-x_2)(2g-\omega^2) + 2k(x_1-x_2) + 2k(x_1+x_2)(x_1^2-x_2^2) = \\
= \; &(x_1-x_2)[(2g-\omega^2+2k) + 2k(x_1+x_2)^2] = 0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

mentre sommando membro a membro abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2)(2g-\omega^2) + 2k(x_1-x_2)(x_1^2-x_2^2) = \\
= \; &(x_1-x_2)[(2g-\omega^2) + 2k(x_1+x_2)^2] = 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Si vede subito che un punto di equilibrio è quello per $x_1 = \pm x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$: se poi è $\omega^2 > 2g + 2k$ abbiamo anche le soluzioni:

$$
x_1 + x_2 = \pm x_m \qquad x_1 - x_2 = \pm x_0 \tag{16}
$$

dove si è indicato:

$$
x_m = \sqrt{\frac{\omega^2 - 2g - 2k}{2k}}, \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\omega^2 - 2g}{2k}} \tag{17}
$$

Punto (3)

Studiamo il caso più semplice, corrispondente alla posizione di equilibrio ad $x = 0$ per $\alpha = k + 2g - \omega^2 > 0$ nel *Caso a*. Riscriviamo le Eq. (3) e (4) come:

$$
V = \frac{1}{2}\alpha x^2 \tag{18}
$$

$$T = \frac{1}{2}(1 + 4x^2)\dot{x}^2 \tag{19}$$

Nell'approssimazione delle piccole oscillazioni la Lagrangiana si scrive:

$$L_0 = T_0 - V_0 \equiv \frac{1}{2}\dot{x}_2 - \frac{1}{2}\alpha x^2 \tag{20}$$

per cui le EEL diventano:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \ddot{x} = \frac{\partial L}{\partial x} = -\alpha x \tag{21}$$

le cui soluzioni sono:

$$x(t) = A\cos(\sqrt{\alpha}t) + B\sin(\sqrt{\alpha}t) \tag{22}$$

con A, B costanti determinate dalle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x(0) &= A \\ \dot{x}(0) &= \sqrt{\alpha}B \\ \Rightarrow x(t) &= x(0)\cos(\sqrt{\alpha}t) + \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{\alpha}}\sin(\sqrt{\alpha}t) \end{aligned} \tag{23}$$