Compito d'esame

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale è costituito da un disco omogeneo di raggio r e massa m, vincolato a rotolare senza strisciare all'interno di una circonferenza di raggio R tale che $l \equiv R - r > 0$.

Il centro del disco è connesso tramite una molla elastica con costante di richiamo elastica k e di lunghezza a riposo nulla ad un punto fisso P, posto sulla verticale passante per il centro O della circonferenza, a distanza d da esso.

1. Scrivere la Lagrangiana che descrive il sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Determinare quale valore d_0 deve assumere d, in funzione dei parametri del sistema, perché il disco rotoli senza strisciare come se fosse libero (cioè come se su esso non agisse nessuna forza).

   Si supponga ora che sia $d = d_0/2$.
3. Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi, e discutere per quali dati iniziali si hanno traiettorie periodiche.
4. Determinare i punti critici e discuterne la natura.
5. Discutere le piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile.
6. Se il piano verticale ruota con velocità angolare costante ω intorno all'asse verticale passante per O, determinare le nuove posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare del valore di ω.
7. Determinare le reazioni vincolari in corrispondenza di una posizione di equilibrio stabile trovata al punto precedente per $\omega^2 = g/l$, se g è la costante di gravità.

Punto (1)

La condizione di rotolamento senza strisciamento impone che la velocità del punto di contatto S tra il disco e la circonferenza sia ad ogni istante nulla: poichè $v_S = -r\dot{\varphi} + l\dot{\theta} = 0$ ne segue che:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{r}\dot{\theta} \tag{1}$$

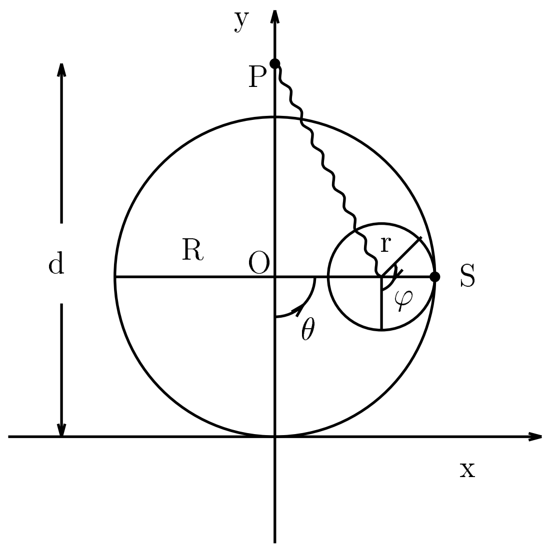


Figura 1:

L'energia cinetica del sistema può essere determinata (teorema di König) come somma dell'energia cinetica del baricentro, pari a $1/2ml^2\dot{\theta}^2$ (rotazione intorno al punto O), più l'energia cinetica del disco nel suo moto di rotazione attorno al baricentro, pari a $1/2I_0\varphi^2$, con $I_0 = 1/2mr^2$ momento d'inerzia del disco intorno al suo centro:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2 \equiv \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

dove usando la (1) si ha:

$$I = ml^2 + I_0\left(\frac{l}{r}\right)^2 = \frac{3}{2}ml^2 \tag{3}$$

L'energia potenziale è data a sua volta dall'energia potenziale gravitazionale e dall'energia potenziale della forza di richiamo elastica esercitata dalla molla, applicata sempre nel baricentro del disco: osservando la figura si ricava facilmente che:

$$V = mgy + \frac{1}{2}k[x^2 + (l - y + d)^2] \tag{4}$$

con:

$$\begin{aligned} x &= l\sin\theta \\ y &= l(1-\cos\theta) \end{aligned} \tag{5}$$

L'energia potenziale è quindi, a meno di una costante, pari a:

$$V = -mgl\cos\theta + kdl\cos\theta \tag{6}$$

La Lagrangiana è data da:

$$L = T - V = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + (mg - kd)l\cos\theta \tag{7}$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \\ I\ddot{\theta} = l(kd - mg)\sin\theta \end{aligned} \tag{8}$$

Punto (2)

Sul disco non agisce nessuna forza se è identicamente $F(\theta) = 0\,\forall\theta$, cioè se:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{dV}{d\theta} = l(kd - mg)\sin\theta \qquad \forall\,\theta \\ \Rightarrow d_0 &= \frac{mg}{k} \end{aligned} \tag{9}$$

Punto (3)

Ponendo $d = d_0/2$ nella (6) abbiamo che:

$$\begin{aligned} V(\theta) &= -\frac{1}{2}mgl\cos\theta \\ L &= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\cos\theta \\ E &= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\cos\theta \end{aligned} \tag{10}$$

Le orbite nello spazio delle fasi (θ, p) saranno le curve di equazione:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\ p &= \pm\sqrt{I(2E + mgl\cos\theta)} \end{aligned} \tag{11}$$

per cui, osservando anche la Fig. (2), si trova immediatamente che le traiettorie periodiche si hanno per qualunque valore di $E > -lmg/2$, eccetto che per $E = lmg/2$ (nel qual caso le orbite sono separate dai due punti di equilibrio instabile a $\theta = \pm\pi$), e che in particolare avremo:

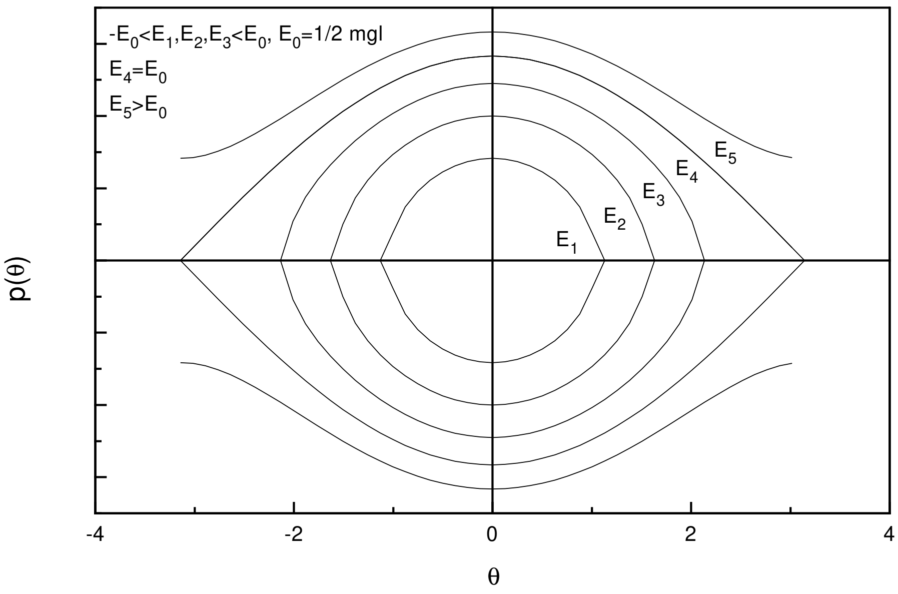


Figura 2: Diagramma di fase nel piano (θ, p).

- *moto oscillatorio* per $E \in (-\frac{lmg}{2}, \frac{lmg}{2})$
- *moto rotatorio* per $E > \frac{lmg}{2}$

Punto (4)

Per individuare i punti critici e determinarne la natura dovremo trovare i punti di stazionarietà del potenziale e studiarne il segno della derivata seconda in tali punti:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= a \sin\theta, \qquad a = \frac{mgl}{2} > 0 \\ V'' = \frac{d^2V}{d\theta^2} &= a\cos\theta \end{aligned} \tag{12}$$

quindi abbiamo che:

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 & \to V" = a > 0 \qquad \textit{minimo} \to \textit{equilibrio} \quad \textit{stabile} \\ \theta = \pm\pi & \to V" = -a < 0 \qquad \textit{massimo} \to \textit{equilibrio} \quad \textit{instabile} \end{cases}$$

Punto (5) Sviluppiamo il potenziale al secondo ordine intorno al punto di equilibrio stabile $\theta = 0$: otteniamo:

$$\begin{aligned} V(\theta) &\simeq \frac{1}{4}mgl\theta^2 = \frac{1}{2}k'^2\theta^2 \\ L_{p.o.}(\theta,\dot{\theta}) &= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k'\theta^2 \end{aligned} \tag{13}$$

da cui ricaviamo la frequenza delle piccole oscillazioni:

$$\omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{k'}{I}} = \sqrt{\frac{g}{3l}} \tag{14}$$

Punto (6)

Se il piano π ruota con velocità angolare ω, nel sistema di riferimento solidale con π compare una forza apparente $F = (m\omega^2 x, 0)$ cui corrisponde un potenziale efficace $V(x) = -1/2m\omega^2x^2$: tenendo conto della (5) avremo quindi un nuovo potenziale $V(\theta)$ dato da:

$$V(\theta) = -\frac{1}{2}mgl\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2l^2\sin^2\theta \tag{15}$$

Le nuove posizioni di equilibrio sono quindi date da i punti di stazionarietà del potenziale (15):

$$\begin{aligned} V' &= \frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{2}mgl\sin\theta - m\omega^2l^2\sin\theta\cos\theta = \\ &= ml\sin\theta\left(\frac{g}{2} - \omega^2l\cos\theta\right) = 0 \\ &\Rightarrow \sin\theta = 0 \to \theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi \\ &\quad\ \cos\theta = \frac{g}{2\omega^2l} \to \theta_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{g}{2\omega^2l}\right) \quad se \quad \beta = \frac{g}{2\omega^2l} \leq 1 \end{aligned} \tag{16}$$

La natura di tali punti è:

$$V"(\theta) = \frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{1}{2}mgl\cos\theta - m\omega^2l^2\cos(2\theta) \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \Rightarrow V" = ml(\frac{g}{2} - \omega^2l) = ml\omega^2l(\beta-1) \\ &\quad V"(0) > 0 \Leftrightarrow \beta > 1 \to equilibrio \quad stabile \\ &\quad V"(0) < 0 \Leftrightarrow \beta < 1 \to equilibrio \quad instabile \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta &= \pi \Rightarrow V" = -\frac{1}{2}mgl - m\omega^2 l^2 \\
& \quad V"(\pi) < 0 \rightarrow equilibrio \quad instabile \\
\theta &= \theta_{3,4} \Rightarrow V" = ml\omega^2 l(1-\beta) \\
& \quad V"(\theta_{3,4}) > 0 \Leftrightarrow \beta < 1 \rightarrow equilibrio \quad stabile \\
& \quad V"(\theta_{3,4}) < 0 \Leftrightarrow \beta > 1
\end{aligned} \tag{18}$$

ma se $\beta > 1$ allora non ho un minimo nei punti $\theta_{3,4}$, in quanto la (16) non ammette soluzioni dell'equazione $\cos\theta = \beta$: riassumendo avremo quindi che:

- se $\beta > 1 \Rightarrow$ $\theta = 0$ è stabile, $\theta = \pi$ è instabile;
- se $\beta < 1 \Rightarrow$ $\theta = 0, \pi$ è instabile, $\theta = \theta_{3,4}$ è stabile.

Analizziamo separatamente il caso $\beta = 1$, che implica $\theta_{3,4} = 0$: poichè risulta anche $V"(0) = 0$, per studiare la stabilità del punto $\theta = 0$ possiamo procedere in due modi:

Soluzione 1: calcoliamo le derivate succesive nel punto $\theta = 0$:

$$\begin{aligned}
V'''(\theta) &= -\frac{1}{2}mgl\sin\theta + 2m\omega^2 l^2 \sin(2\theta) \Rightarrow V'''(0) = 0 \\
V^{IV}(\theta) &= -\frac{1}{2}mgl\cos\theta + 4m\omega^2 l^2 \cos(2\theta) \Rightarrow V^{IV}(0) > 0
\end{aligned} \tag{19}$$

da cui deduciamo che $\theta = 0$ è una posizione di equilibrio stabile.

Soluzione 2: ponendo $\beta = 1$ nella (15) riscriviamo il potenziale come:

$$V(\theta) = -\frac{1}{2}mgl(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta) = -\alpha f(\theta) \quad \alpha = \frac{1}{2}mgl > 0 \tag{20}$$

dove:

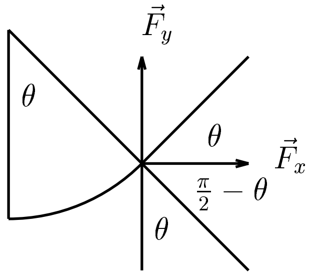
$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \cos\theta + \frac{1}{2}(1-\cos^2\theta) = \\
&= \frac{2\cos\theta + 1 - \cos^2\theta}{2} = \\
&= \frac{2\cos\theta - 1 - \cos^2\theta + 2}{2} = \\
&= 1 - \frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2
\end{aligned} \tag{21}$$

per cui la (20) equivale a:

$$V(\theta) = -\alpha + \frac{\alpha}{2}(1 - \cos\theta)^2 \tag{22}$$

da cui si vede subito che il potenziale ha un minimo per $\theta = 0$, ritrovando così che $\theta = 0$ è una posizione di equilibrio stabile.

Punto (7)



Soluzione (1)

Se $\omega^2 = g/l$ avremo che $\beta = 1/2 < 1$, per cui le posizioni di equilibrio stabili sono quelle in corrispondenza a $\theta = \theta_{3,4}$: ricordiamo che essendo $d = d_0/2$ e $\omega^2 = g/l$ avremo:

$$\begin{aligned} d = \frac{d_0}{2} &\Rightarrow kd = \frac{mg}{2} \\ \theta_3 = \arccos\left(\frac{g}{2\omega^2 l}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) &= \pi/4 \end{aligned} \tag{23}$$

Analizziamo le forze agenti sul centro del disco:

$$\begin{aligned} \vec{f_{el}} &= (-kx, k(d + (l - y))) \\ \vec{f_{cf}} &= (m\omega^2 x, 0) \\ \vec{f_g} &= (0, -mg) \end{aligned} \tag{24}$$

con (x, y) dati dalla (5). Decomponendo la:

$$\vec{F} = \vec{f_{el}} + \vec{f_{cf}} + \vec{f_g} = ((m\omega^2 - k)x, k(d + l\cos\theta) - mg) \tag{25}$$

in una componente radiale ed una tangenziale, $\vec{F} = \vec{F}_{rad} + \vec{F}_{tan}$, risulterà:

$$\vec{F}_{tan}(\theta_3) = 0 \qquad \vec{F}_{rad}(\theta_3) = -\vec{R} \tag{26}$$

con $\vec{R}$ forza di vincolo nel punto di equilibrio $\theta = \theta_3 \to \vec{F}_{tan} = 0$. Osservando la costruzione in figura avremo che:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{tan} &= \vec{F}_x \cos\theta + \vec{F}_y \sin\theta \\ \vec{F}_{rad} &= \vec{F}_y \sin\theta - \vec{F}_y \cos\theta \end{aligned} \tag{27}$$

da cui segue che:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{tan}| &= (m\omega^2 - k)l \sin\theta\cos\theta + (k(d + l\cos\theta) - mg)\sin\theta = \\ &= m\sin\theta(\omega^2 l\cos\theta - \frac{g}{2}) \end{aligned} \tag{28}$$

e quindi $|\vec{F}_{tan}(\theta_3)| = 0$ in virtù della (23). Inoltre:

$$|\vec{F}_{rad}| = (m\omega^2 - k)l\sin^2\theta - (kd + kl\cos\theta - mg)\cos\theta \tag{29}$$

e calcolandola nel punto $\theta = \theta_3 \Rightarrow \cos\theta_3 = 1/2$, $\sin\theta_3 = \sqrt{3}/2$ otterremo:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{rad}| &= (m\omega^2 - k)l\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(kd + \frac{kl}{2} - mg) = \\ &= \frac{3}{4}m\omega^2 l - lk + \frac{mg}{4} \end{aligned} \tag{30}$$

cioè, essendo $\omega^2 l = g$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{rad} &= (mg - kl)\hat{r} \\ \vec{R} &= -\vec{F}_{rad} = (-mg + kl)\hat{r} \end{aligned} \tag{31}$$

con $\hat{r}$ versore radiale.

Soluzione (2)

Nel sistema di riferimento solidale con il disco indichiamo con ρ, θ le coordinate del centro C del disco e con ϕ l'angolo di rotazione del disco intorno a C. Avremo due vincoli olonomi bilaterali dati da:

$$\begin{aligned} G_1(\rho, \theta, \varphi) &\equiv \rho - l = 0 \\ G_2(\rho, \theta, f) &\equiv \varphi - \frac{l}{r} + a = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

dove G_2 è stato ricavato integrando il vincolo di puro rotolamento, e a=cost. L'energia potenziale diventa:

$$
\begin{aligned}
V(\rho,\theta,\varphi) &= -mg\rho\cos\theta + \frac{1}{2}k[\rho^2\sin^2\theta + (d+\rho\cos\theta)^2] - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2\sin^2\theta = \\
&= (kd-mg)\rho\cos\theta + \frac{1}{2}k\rho^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2\sin^2\theta \qquad (33)
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi per i gradienti ($\nabla \equiv (\partial_\rho, \partial_\theta, \partial_\varphi)$):

$$
\nabla V = \begin{pmatrix} (kd-mg)\cos\theta + k\rho - m\omega^2\rho\sin^2\theta \\ -(kd-mg)\rho\sin\theta - m\omega^2\rho^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\nabla G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{l}{r} \\ 1 \end{pmatrix}
$$

da cui segue che:

$$
\begin{aligned}
\nabla V \cdot \nabla G_1 &= (kd-mg)\cos\theta + k\rho - m\omega^2\rho\sin^2\theta \\
\nabla V \cdot \nabla G_2 &= \frac{l}{r}\sin\theta\rho[(kd-mg) - m\omega^2\rho\cos\theta \qquad (34)
\end{aligned}
$$

$$(35)$$

Utilizzando le condizioni (23) troviamo che nei punti di equilibrio $\theta_{3,4}$ risulta $\nabla V \cdot \nabla G_2 = 0$, per cui la reazione vincolare è radiale ed è data da:

$$
|\vec{R}| = \frac{|\nabla V \cdot \nabla G_1|}{|\nabla G_1|^2} = \left| -\frac{mg}{2}\cos\theta_3 + kl - m\omega^2 l\sin^2\theta_3 \right| \qquad (36)
$$

che in virtù della (23) coincide con la (30).