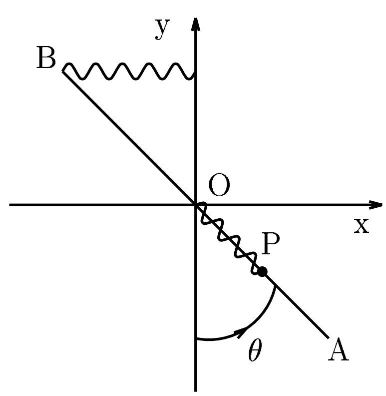
Compito di esonero del 2 Aprile 1998

Un'asta omogenea AB di lunghezza l e massa M è libera di ruotare attorno al suo centro O in un piano verticale. All'estremo B dell'asta è applicata una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, vincolata a rimanere sempre orizzontale. Lungo l'asta può scorrere senza attrito un punto materiale P di massa m collegato al centro O dell'asta tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sia s l'ascissa di P lungo l'asta contata a partire da O e sia θ l'angolo che l'asta forma con la verticale.

1. Determinare la Lagrangiana e scrivere le equazioni del moto.
2. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
3. Calcolare le frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.
4. Determinare l'Hamiltoniana del sistema.
5. Se il punto P è fissato nella posizione $s = l/2$ e se $\frac{mg}{kl} = \frac{1}{4}$, determinare la minima velocità iniziale $\dot{\theta}_0$ dell'asta, che parte dalla posizione $\theta = 0$, affinchè il moto sia rotatorio.



Punto (1)

L'energia cinetica dell'asta è data dall'energia cinetica del suo moto rotatorio, con velocità angolare $\dot{\theta}$, intorno ad un asse passante per il centro di massa O, per cui:

$$T_A = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 \tag{1}$$

con I_0 momento d'inerzia intorno al punto O, $I_0 = \frac{1}{12} M l^2$. Il punto P ha a sua volta coordinate e velocità:

$$\begin{cases} x_P = s \sin\theta \\ y_P = -s\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x_P} = \dot{s}\sin\theta + s\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y_P} = -\dot{s}\cos\theta + s\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

e quindi la sua energia cinetica è pari a:

$$T_P = \frac{1}{2} m (\dot{x_P}^2 + \dot{y_P}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2) \tag{2}$$

L'energia potenziale è somma dell'energia potenziale gravitazionale del punto P (il baricentro dell'asta è fisso) e dell'energia potenziale elastica delle forze elastiche agenti sul punto P e sull'estremo B dell'asta, posto a distanza $x_B = -\frac{l}{2}\sin\theta$ dall'asse y:

$$\begin{aligned} V_g &= mgy_P = -mgs\cos\theta \\ V_{el} &= \frac{1}{2} k s^2 + \frac{1}{2} k x_B^2 = \frac{1}{2} k s^2 + \frac{1}{2} k \frac{l^2}{4} \sin^2\theta \end{aligned} \tag{3}$$

La Lagrangiana del sistema, nelle variabili lagrangiane s e θ, è quindi:

$$L = T_A + T_P - V = \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{12} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) + mgs\cos\theta - \frac{1}{2} k s^2 - \frac{1}{2} k \frac{l^2}{4} \sin^2\theta \tag{4}$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= ms\dot{\theta}^2 - ks + mg\cos\theta \\ (\frac{Ml^2}{12} + ms^2)\ddot{\theta} &= -2ms\dot{s}\dot{\theta} - mgs\sin\theta - \frac{kl^2}{4}\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{5}$$

Punto (2)

Determiniamo i punti critici per il potenziale $V(s,\theta)$ dato dalla (3):

$$V(s,\theta) = -mgs\cos\theta + \frac{1}{2} k s^2 + \frac{1}{2} k \frac{l^2}{4} \sin^2\theta \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= ks - mg\cos\theta = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \sin\theta \left(\frac{kl^2}{4} \cos\theta + mgs \right) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Abbiamo quattro possibili soluzioni:

$$\begin{aligned} \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi; s = \frac{mg}{k}\cos\theta \Rightarrow P_{1,2} = (\pm\frac{mg}{k}, \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}) \\ s = -\frac{kl^2}{4mg}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0, s = 0 \Rightarrow P_{3,4} = (0, \pi \pm \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{8}$$

date da coppie equivalenti di punti, corrispondenti a rotazioni di π dell'asta. Discutiamo quindi la natura dei punti P_1 e P_3, studiando l'Hessiano $\mathcal{H}(s,\theta)$ del potenziale $V(s,\theta)$ in tali punti:

$$\mathcal{H}(s,\theta) = \begin{pmatrix} k & mg\sin\theta \\ mg\sin\theta & mg\cos\theta + \frac{kl^2}{4}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(\frac{mg}{k}, 0) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{m^2g^2}{k} + \frac{kl^2}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\mathcal{H} > 0, k > 0 \Rightarrow \text{eq.stabile}$$

$$\mathcal{H}(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k & mg \\ mg & -\frac{kl^2}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\mathcal{H} < 0, \Rightarrow \text{eq.instabile (sella)}$$

Punto (3)

La Lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno al punto di equilibrio stabile $\mathbf{q}_0 = (mg/k, 0)$ si scrive:

$$L_{p.o.} = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{q}}, \hat{A}\dot{\mathbf{q}}\right) - \frac{1}{2}\left((\mathbf{q}-\mathbf{q}_0), \hat{V}''(\mathbf{q}-\mathbf{q}_0)\right) \tag{9}$$

avendo indicato con $\mathbf{q} = (s,\theta)$, con $\hat{V}'' = \mathcal{H}(\mathbf{q}_0)$, e con $\hat{A}$ la matrice dell'energia cinetica valutata in $\mathbf{q}_0$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{12} + \frac{m^3g^2}{k^2} \end{pmatrix}$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni dell'equazione:

$$det\left(\hat{V}'' - \omega^2\hat{A}\right) = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & 0 \\ 0 & \frac{m^2g^2}{k} + \frac{kl^2}{4} - \omega^2\left(\frac{Ml^2}{12} + \frac{m^3g^2}{k^2}\right) \end{vmatrix} = 0$$

e quindi:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k(4m^2g^2 + k^2l^2)}{Ml^2k^2 + 12m^3g^4}} \tag{10}$$

Punto (4)
I momenti coniugati alle variabili lagrangiane sono:

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \Rightarrow \dot{s} = \frac{p_s}{m} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{Ml^2}{12} + ms^2\right)\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\frac{Ml^2}{12} + ms^2} \end{aligned} \tag{11}$$

per cui l'Hamiltoniana si scrive:

$$H(s,\theta,p_s,p_\theta) = T+V = \frac{p_s^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2\left(\frac{Ml^2}{12} + ms^2\right)} - mgs\cos\theta + \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{2}k\frac{l^2}{4}\sin^2\theta \tag{12}$$

Punto (5)

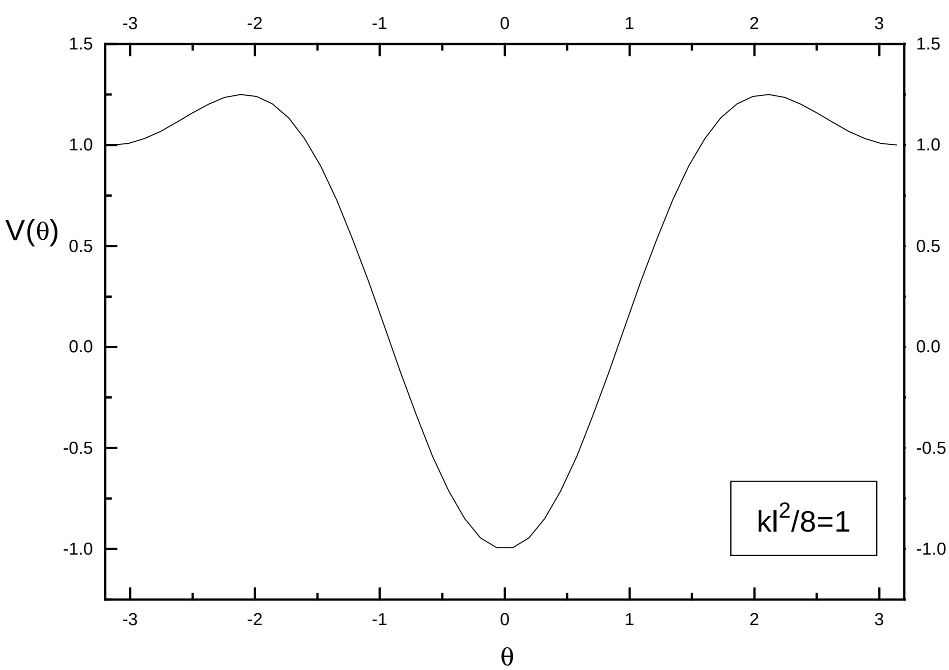


Figura 1: Energia potenziale $V(\theta)$ (per $kl^2/8 = 1$).

Ponendo $s = l/2$ e $\frac{mg}{kl} = \frac{1}{4}$, il potenziale $V(\theta)$ diventa:

$$\begin{aligned} V(\theta) &= -mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\frac{l^2}{4}\sin^2\theta + cost = \\ &= \frac{kl^2}{8}(\sin^2\theta - \cos\theta) \end{aligned} \tag{13}$$

Come si osserva in Fig. 1, $V(\theta)$ ha quattro punti di equilibrio:

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= \frac{kl^2}{8}(2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta) = \frac{kl^2}{8}\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0 \\ &\Rightarrow \sin\theta = 0 \rightarrow \theta_{1,2} = 0, \pi; \\ &\quad\; \cos\theta = -\frac{1}{2} \rightarrow \theta_{3,4} = \pm\frac{2}{3}\pi \end{aligned} \tag{14}$$

e assume il valore massimo in corrispondenza a $\theta_{3,4}$:

$$V_{max} = V\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{5}{4}\frac{kl^2}{8} \tag{15}$$

Il moto è rotatorio quando l'energia è maggiore di V_{max}: ricavando l'energia cinetica dalle (1)-(2), abbiamo che l'energia cinetica del moto con dati iniziali $(\theta = 0, \dot{\theta}_0)$ deve soddisfare:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(\frac{Ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4}\right)\dot{\theta}_0^2 - \frac{kl^2}{8} > V_{max} \Rightarrow \\ &\quad \dot{\theta}_0^2 > \frac{27}{4}\frac{k}{M + 3m} \end{aligned} \tag{16}$$