

Esonero di Meccanica Razionale del 5-6-1998

Esercizio 1

Data l'hamiltoniana:

$$H(p, q) = -p \sin 2q$$

e la trasformazione:

$$P = -2\sqrt{p} \sin q \quad Q = \sqrt{p} \cos q$$

1. dimostrare che la trasformazione è симплетica determinando una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$;
2. determinare la nuova hamiltoniana $K(P, Q)$ e risolvere le equazioni di Hamilton;
3. determinare le soluzioni $q(t)$ e $p(t)$ delle equazioni di Hamilton associate all'hamiltoniana $H(p, q)$ con dati iniziali $q(0) = \pi/4$, $p(0) = 1$.

Punto (1)

Se la trasformazione:

$$P = -2\sqrt{p} \sin q \tag{1}$$

$$Q = \sqrt{p} \cos q \tag{2}$$

è indotta da una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$, devono essere verificate le relazioni:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial F}{\partial P} \end{aligned} \tag{3}$$

Ricavando p e Q dalle (1)-(2) abbiamo:

$$p = \frac{P^2}{4 \sin^2 q} = \frac{\partial F}{\partial q} \tag{4}$$

$$Q = -\frac{P \cos q}{2 \sin q} = \frac{\partial F}{\partial P} \tag{5}$$

Integrando la (4) in dq si ottiene:

$$F(q, P) = -\frac{P^2}{4} \cot q + f(P) \quad (6)$$

e integrando la (5) in dP :

$$F(q, P) = -\frac{P^2}{4} \cot q + g(P) \quad (7)$$

Dal confronto tra (6) e (7) si ha:

$$F(q, P) = -\frac{P^2}{4} \cot q \quad (8)$$

Punto (2)

La nuova Hamiltoniana è:

$$K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = PQ \quad (9)$$

per cui le equazioni di Hamilton diventano:

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -P \quad (10)$$

$$\dot{Q} = -\frac{\partial K}{\partial P} = Q \quad (11)$$

$$(12)$$

le cui soluzioni sono:

$$P(t) = P(0)e^{-t} \quad (13)$$

$$Q(t) = Q(0)e^t \quad (14)$$

Punto (3)

Avendo le soluzioni in termini delle coordinate $Q(t), P(t)$, basterà ricavare dalle (1)-(2) le vecchie coordinate $q(t), p(t)$:

$$\frac{P}{Q} = -2 \tan q \Rightarrow q(t) = \arctan \left(-\frac{P(0)}{2Q(0)} e^{-2t} \right) \quad (15)$$

$$\frac{P^2}{4} + Q^2 = p \Rightarrow p(t) = \frac{1}{4}P(0)^2 e^{-2t} + Q(0)^2 e^{2t} \quad (16)$$

Imponendo le condizioni iniziali $q(0) = \pi/4, p(0) = 1$ in termini delle Q, P nelle (1)-(2):

$$P(0) = -2 \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}, \quad Q(0) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

otteniamo infine:

$$q(t) = \arctan(e^{-2t}) \quad (18)$$

$$p(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t} = \cosh(2t) \quad (19)$$