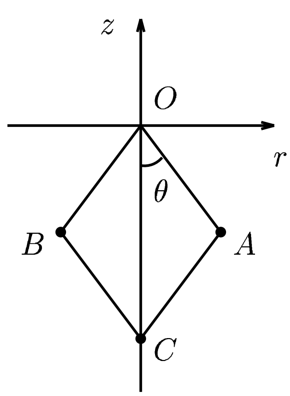
Esercizio

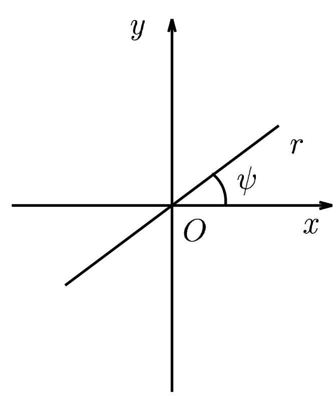
Tre punti materiali A, B, C di massa m sono vincolati a muoversi in un piano verticale π di origine O in modo che le distanze OA, OB, BC, AC siano fisse e tutte eguali a l, e che il punto B ed il punto A abbiano sempre la stessa coordinata z. Il piano π può solo ruotare intorno, all'asse z ed il punto C è vincolato all'asse z. Tutti i vincoli sono da supporsi ideali.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema, usando come variabili lagrangiane l'angolo θ che il segmento OA forma con l'asse z e l'angolo ψ che il piano π forma con l'asse x.

2. Scrivere l'integrale primo corrispondente alla variabile ciclica presente nella lagrangiana, nel seguito chiamato J, e far vedere che esso corrisponde alla proiezione del momento della quantità di moto lungo l'asse z.

3. Usando il risultato del punto (2) e la conservazione dell'energia, far vedere che, se $J \neq 0$, la funzione $\theta(t)$ è in generale periodica e, per un particolare valore dell'energia dipendente da J, addirittura costante; scrivere inoltre l'espressione integrale del periodo.





Punto (1)

Determiniamo le coordinate dei tre punti in funzione delle variabili lagrangiane:

$$\begin{cases} x_A = r_A \cos\psi \\ y_A = r_A \sin\psi \\ z_A = -l\cos\theta \end{cases} , \quad r_A = l\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} x_A = l\sin\theta\cos\psi \\ y_A = l\sin\theta\sin\psi \\ z_A = -l\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = -x_A \\ y_B = -y_A \\ z_B = z_A \end{cases} \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 = l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2\theta\dot{\psi}^2$$

$$\begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2z_A = -2l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow v_C^2 = 4l^2 \sin^2\theta\dot{\theta}^2$$

L'energia cinetica totale è quindi pari a:

$$T = \frac{1}{2}m\left(v_A^2 + v_B^2 + v_C^2\right) = ml^2\left(1 + 2\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + ml^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2 \qquad (1)$$

L'energia potenziale gravitazionale dei tre punti è data a sua volta da:

$$V = mg(z_A + z_B + z_C) = -4mgl\cos\theta \qquad (2)$$

per cui la lagrangiana si scrive:

$$L = T - V = ml^2\left(1 + 2\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + ml^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2 + 4mgl\cos\theta \qquad (3)$$

Punto (2)

La variabile ciclica del problema è $\psi(t)$: poichè la lagrangiana (3) non dipende esplicitamente da ψ, il momento cinetico ad essa coniugato p_ψ si conserva, in virtù delle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0 \quad \Rightarrow \\ &p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = 2ml^2\sin^2\theta\dot{\psi} = \text{cost} \end{aligned} \qquad (4)$$

Del resto, la proiezione J lungo l'asse z del momento della quantità di moto totale del sistema è data da:

$$\begin{aligned} J &= \sum_i \left(\vec{r}_i \times m\vec{v}_i\right)_z = m\sum_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) = \\ &= 2m(x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A) = 2ml^2\sin^2\theta\dot{\psi} \end{aligned} \qquad (5)$$

e coincide con p_ψ, per cui si conserva durante il moto, come era del resto evidente osservando che è nulla la proiezione lungo l'asse z del momento totale delle forze agenti sul sistema (forza peso e reazioni vincolari).

Punto (3)

L'Hamiltoniana del sistema, data da:

$$H = T + V = ml^2\left(1 + 2\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + ml^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2 - 4mgl\cos\theta \tag{6}$$

non dipende esplicitamente da tempo, per cui si conserva l'energia totale del sistema $E = H = cost.$ Sostituendo nella precedente $\dot{\psi}$ con la sua espressione in funzione di $J \neq 0$ secondo le (4)-(5), riduciamo il problema al caso unidimensionale:

$$\begin{aligned} E &= m_{eff}\dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta) && (7)\\ m_{eff} &= ml^2\left(1 + 2\sin^2\theta\right) && (8)\\ V_{eff}(\theta) &= -4mgl\cos\theta + \frac{J^2}{4ml\sin^2\theta} && (9) \end{aligned}$$

Si osservi che la dipendenza della massa efficace m_{eff} dall'angolo θ è ininfluente ai fini dell'analisi qualitativa del moto descritto dalla (7), che avverrà sempre per $E \geq V_{eff}(\theta)$, essendo i punti di inverisone del moto soluzione dell'equazione $E = V_{eff}(\theta)$. Per $J \neq 0$, come si è supposto in partenza, il potenziale V_{eff} dato dalla (9) diverge in $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, per cui ha di sicuro almeno un punto di minimo. Per poter concludere che il moto è sempre periodico, dobbiamo verificare che esiste un solo minimo θ_0.

I minimi del potenziale $V_{eff}(\theta)$ sono soluzioni dell'equazione:

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \Rightarrow 8m^2l^2g\sin^4\theta = J^2\cos\theta \tag{10}$$

che può essere riscritta come:

$$\tan\theta = \frac{a(J)}{\sin^3\theta}, \quad a(J) > 0 \tag{11}$$

e risolta graficamente come mostrato in Fig. 1. Infatti la funzione $\tan\theta$ è positiva tra 0 e $\pi/2$ e negativa tra $\pi/2$ e π, divergendo a $\pi/2$, mentre la funzione $\sin^3\theta$ è sempre positiva tra 0 e π, divergendo in $\theta = 0, \pi$. Ne segue che può esistere una sola soluzione dell'equazione (10), ad un certo $\theta_0 < \pi/2$, dipendente in generale da J. Il valore del potenziale $V_{eff}(\theta_0)$ in tale minimo definisce anche il valore dell'energia E_0 per la quale la funzione $\theta(t)$ è una costante, cioè la (7) ammette la sola soluzione $\dot{\theta} = 0$:

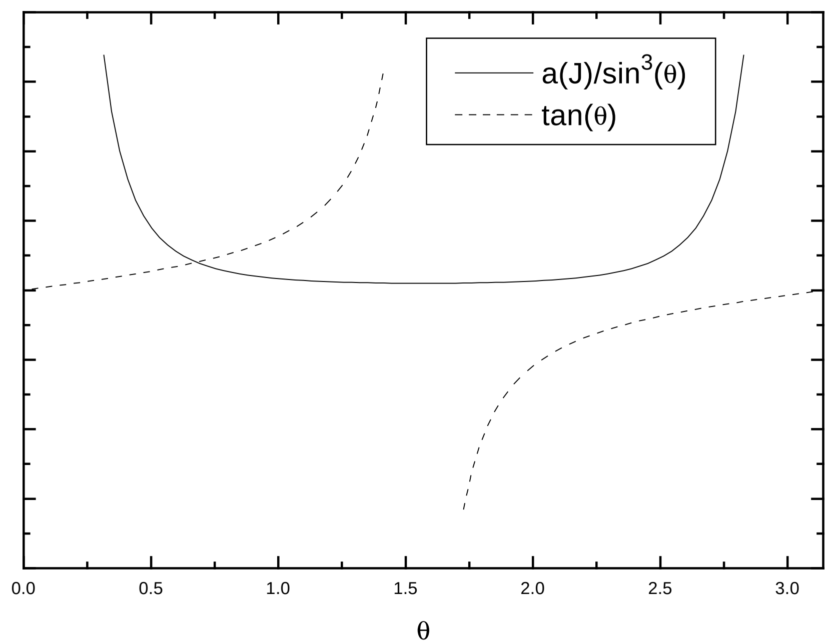


Figura 1: Soluzione grafica dell'equazione (11): esiste un solo $0 < \theta_0 < \pi/2$ che la soddisfi.

$$E_0 = V_{eff}(\theta_0) = \frac{32m^3l^3g^2}{J^2}\sin^4\theta_0 + \frac{J^2}{4ml\sin^2\theta_0} \tag{12}$$

che dipende da J. In generale, per qualunque scelta dell'energia iniziale il moto è limitato alla regione compresa tra $\theta_{min} < \theta_0 < \theta_{max}$ (vedi Fig. 2), in corrispondenza dei quali $E = V_{eff}$. L'espressione integrale del periodo si ha ricavando dalla (7) $d\theta/dt$, ottenendo:

$$T = 2\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m_{eff}(\theta)}\left(E - V_{eff}(\theta)\right)}} \tag{13}$$

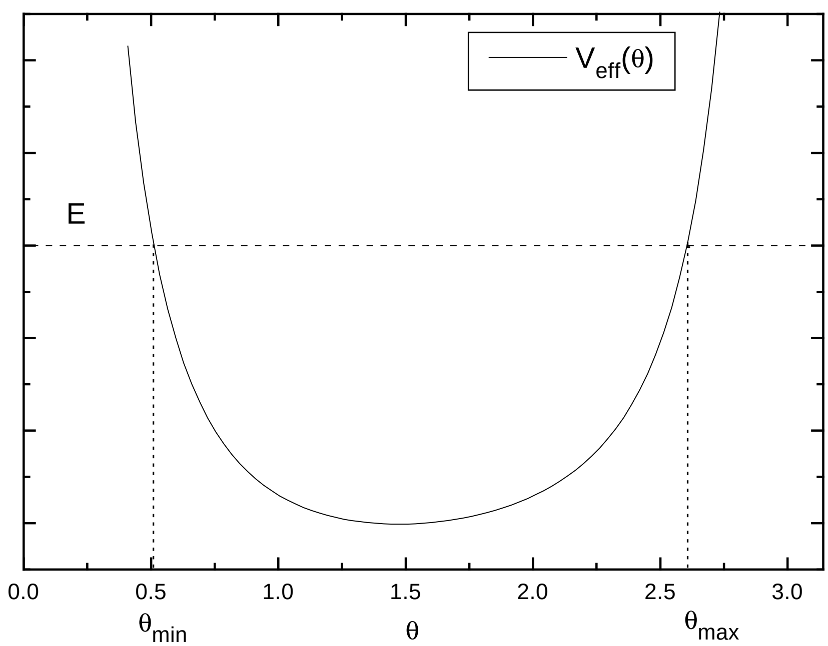


Figura 2: Potenziale $V_{eff}(\theta)$: per ogni valore di E si ha un moto periodico compreso tra θ_{min} e θ_{max}.