Compito di esame del 17 Giugno 1997

Un sistema materiale pesante appartenente ad un piano verticale è costituito da un disco rigido omogeneo di raggio R e massa M e da una sbarra omogenea AB di lunghezza $l = R\sqrt{3}$ e massa m.

Il disco è vincolato a ruotare intorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo centro O e gli estremi A e B della sbarra sono vincolati a scorrere sul bordo del disco. Tutti i vincoli sono ideali. Il centro C della sbarra AB è collegato mediante una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla ad un punto D posto sul bordo del disco.

Si considerino come coordinate lagrangiane gli angoli θ e φ che, rispettivamente, OC e OD formano con la verticale per O.

1. Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.

2. Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

3. Scrivere la Lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno ai punti di equilibrio stabile, e determinarne le frequenze, nel caso in cui i valori dei parametri siano $R = 1$, $m = 1$, $M = 2$, $k = 1$, $g = 1$ (in opportune unità di misura).

4. Scrivere la Hamiltoniana.

5. Nel caso in cui la costante di richiamo sia trascurabile risolvere il moto con il metodo di Hamilton-Jacobi.

6. Nel caso $k \neq 0$ determinare la trasformazione simplettica $\mathbf{q} = (\varphi, \theta)$, $\mathbf{p} = (p_\varphi, p_\theta) \to \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ tale che $\mathbf{Q} = (\theta - \varphi, \theta)$ e scrivere la nuova Hamiltoniana $H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$.

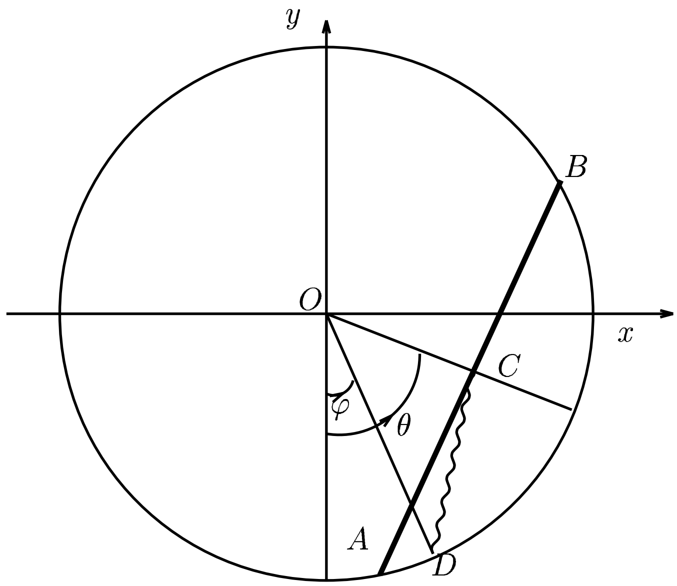
Punto (1)

L'energia cinetica del sistema è somma dell'energia cinetica del disco nel suo moto di rotazione intorno al punto O, con velocità angolare $\dot\varphi$, più l'energia cinetica della sbarretta: quest'ultima è data dalla somma dell'energia cinetica del baricentro C, che ruota intorno ad O con velocità angolare $\dot\theta$, più l'energia cinetica del moto di rotazione della sbarretta intorno a C, sempre con velocità angolare $\dot\theta$. Osservando che:

$$OC = \sqrt{R^2 - (l/2)^2} = R/2 \tag{1}$$

$$I_d = \frac{1}{2} M R^2 \tag{2}$$

$$I_s = \frac{1}{12} m l^2 = \frac{1}{4} m R^2 \tag{3}$$



dove I_d, I_s indicano i momenti di inerzia rispettivamente del disco rispetto ad O e della sbarretta rispetto a C, avremo che:

$$T = T_d + T_s = \frac{1}{2} I_d \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{8} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_s \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I_d \dot{\varphi}^2 + I_s \dot{\theta}^2 \tag{4}$$

L'energia potenziale del sistema è a sua volta detrminata dall'energia potenziale gravitazionale della sbarretta e dall'energia potenziale elastica:

$$V = V_g + V_{el} = mgy_C + \frac{1}{2} k \overline{CD}^2 \tag{5}$$

Poiché le coordinate dei punti C e D sono:

$$\begin{cases} x_C = \frac{R}{2} \sin\theta \\ y_C = -\frac{R}{2} \cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_D = R \sin\varphi \\ y_D = -R \cos\varphi \end{cases}$$

avremo che:

$$\overline{CD}^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 = R^2 \left(\frac{5}{4} - \sin\theta \sin\varphi - \cos\theta \cos\varphi \right) \tag{6}$$

e quindi l'energia potenziale è data, a meno di una costante, da:

$$V = -\frac{1}{2} mgR \cos\theta - \frac{1}{2} kR^2 (\sin\theta \sin\varphi + \cos\theta \cos\varphi) \tag{7}$$

La Lagrangiana del sistema è pertanto, dalle (4) e (7):

$$L=\frac{1}{2}I_d\dot{\varphi}^2+I_s\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mgR\cos\theta+\frac{1}{2}kR^2(\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi) \tag{8}$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial\varphi} \Rightarrow I_d\ddot{\varphi}=\frac{1}{2}kR^2(\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi) \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial\theta} \Rightarrow 2I_s\ddot{\theta}=-\frac{1}{2}mgR\sin\theta+\frac{1}{2}kR^2(\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi) \tag{10}$$

Punto (2)

Per determinare i punti di equilibrio cerchiamo anzitutto i punti di stazionarietà del potenziale (7):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial\varphi} &= -\frac{1}{2}kR^2(\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi)=0\\ \frac{\partial V}{\partial\theta} &= \frac{1}{2}mgR\sin\theta+\frac{1}{2}kR^2(\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi)=0\end{aligned} \tag{11}$$

Abbiamo quattro possibili soluzioni (φ,θ): $P_1=(0,0)$, $P_2=(\pi,0)$, $P_3=(0,\pi)$, $P_4=(\pi,\pi)$. Per determinare la natura di tali punti, occorre studiare in essi la matrice Hessiana $\hat{V}''(\varphi,\theta)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} &= \frac{1}{2}kR^2(\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi)\\ \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} &= \frac{1}{2}mgR\cos\theta+\frac{1}{2}kR^2(\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi)\\ \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi} &= -\frac{1}{2}kR^2(\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi)\end{aligned} \tag{12}$$

Ricordando la definizione di $\hat{V}''(\varphi,\theta)$:

$$\hat{V}''(\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\theta}\\ \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi} & \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\end{pmatrix}$$

e ricordando che se $det\hat{V}''(P_i)>0, Tr\hat{V}''(P_i)>0$, P_i è punto di minimo per il potenziale V e quindi è una posizione di equilibrio stabile, mentre se

$det\hat{V}''(P_i) > 0, Tr\hat{V}''(P_i) < 0$, o $det\hat{V}''(P_i) < 0$ P_i è posizione di equilibrio instabile (corrispondente rispettivamente ad un punto di massimo o ad un punto di sella per il potenziale V), avremo che:

$$\hat{V}''(P_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}kR^2 & -\frac{1}{2}kR^2 \\ -\frac{1}{2}kR^2 & \frac{1}{2}mgR + \frac{1}{2}kR^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{equilibrio stabile}$$

$$\hat{V}''(P_2) = \hat{V}''(P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kR^2 & \frac{1}{2}kR^2 \\ \frac{1}{2}kR^2 & \pm\frac{1}{2}mgR - \frac{1}{2}kR^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{equilibrio instabile}$$

Infatti se vale il segno $+$ è $det\hat{V}''(P_i) = -\frac{1}{4}mgkR^3 < 0$, mentre se vale il segno $-$ è $det\hat{V}''(P_i) = \frac{1}{4}mgkR^3 > 0$ ma $Tr\hat{V}''(P_i) = -\frac{1}{2}mgR - kR^2 < 0$, per cui si tratta sempre di equilibrio instabile.

$$\hat{V}''(P_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}kR^2 & -\frac{1}{2}kR^2 \\ -\frac{1}{2}kR^2 & -\frac{1}{2}mgR + \frac{1}{2}kR^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{equilibrio instabile}$$

Punto (3)

Abbiamo visto che l'unico punto di equilibrio stabile è $P_1 = (0,0)$: la Lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno a P_1 è data da:

$$L_{p.o.} = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{q}}, \hat{T}\dot{\mathbf{q}}\right) - \frac{1}{2}\left(\mathbf{q}, \hat{V}''(P_1)\mathbf{q}\right) \tag{13}$$

dove $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ indica il prodotto scalare, $\mathbf{q} = (\varphi, \theta)$, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{\varphi}, \dot{\theta})$ e $\hat{T}$ è la matrice:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 2I_s \end{pmatrix}$$

La (13) è equivalente cioè a:

$$L_{p.o.} = \frac{1}{2}I_d\dot{\varphi}^2 + I_s\dot{\theta}^2 - \left[\frac{1}{4}kR^2\varphi^2 + \left(\frac{1}{4}mgR + \frac{1}{4}kR^2\right)\theta^2 + \frac{1}{2}kR^2\theta\varphi\right] \tag{14}$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono date dagli autovalori della matrice Hessiana $\hat{V}''$, calcolati diagonalizzando $\hat{V}''$ stessa nella metrica indotta dalla matrice $\hat{T}$: esse sono quindi le soluzioni dell'equazione agli autovalori:

$$det\left(\hat{V}''(P_1) - \omega^2\hat{T}\right) = 0 \tag{15}$$

cioè:

$$det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}kR^2 - \omega^2 I_d & -\frac{1}{2}kR^2 \\ -\frac{1}{2}kR^2 & \frac{1}{2}mgR + \frac{1}{2}kR^2 - \omega^2 2I_s \end{pmatrix} = 0$$

da cui segue:

$$\omega^4 2I_d I_s - \omega^2 \left[\frac{1}{2}kR^2(I_d + 2I_s) + \frac{1}{2}mgRI_d\right] + \frac{1}{4}mgkR^3 = 0 \tag{16}$$

Nel caso in cui le costanti assumano i valori indicati la precedente si riduce a:

$$2\omega^4 - 5\omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{4}(5 \pm \sqrt{17}) \tag{17}$$

Punto (4)

Per scrivere l"Hamiltoniana del sistema determiniano i momenti cinetici coniugati:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_d \dot{\varphi} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2I_s \dot{\theta} \end{aligned} \tag{18}$$

Riscrivendo la (4) come funzione di p_φ, p_θ e ricordando la definizione di $H = T + V$ per potenziali indipendenti da $\dot{\varphi}, \dot{\theta}$, abbiamo:

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2I_d} + \frac{p_\theta^2}{4I_s} - \frac{1}{2}mgR\cos\theta - \frac{1}{2}kR^2(\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi) \tag{19}$$

Punto (5)

Se la costante elastica è trascurabile, possiamo riscrivere l'Hamiltoniana (19) come:

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2I_d} + \frac{p_\theta^2}{4I_s} - \frac{1}{2}mgR\cos\theta \tag{20}$$

Poiché H è indipendente dal tempo, possiamo cercare la funzione generatrice nella forma:

$$F(\theta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2) = W(\theta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2) - \alpha_2 t \tag{21}$$

e scrivere l'equazione di Hamilton come:

$$\begin{aligned} H\left(\varphi, \theta, \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) &= \alpha_2 \Rightarrow \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{1}{2I_d} + \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 \frac{1}{4I_s} - \frac{1}{2}mgR\cos\theta &= \alpha_2 \end{aligned} \tag{22}$$

Cerchiamo una soluzione della forma:

$$W(\theta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(\varphi, \alpha_1, \alpha_2) + W_2(\theta, \alpha_1, \alpha_2) \tag{23}$$

da cui la (22) diventa:

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{1}{2I_d} = \alpha_2 - \left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta}\right)^2 \frac{1}{4I_s} + \frac{1}{2} mgR\cos\theta \tag{24}$$

Poiché il membro a sinistra non dipende da θ ed il membro a destra non dipende da φ, per essere soddisfatta la precedente devono essere pari ad una costante ambo i membri. Ponendo quindi:

$$\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} = \alpha_1 \Rightarrow W_1 = \alpha_1 \varphi \tag{25}$$

avremo anche, sostituendo la precedente nella (24), che:

$$W_2 = \int d\theta \sqrt{4I_s\left[\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{2I_d} + \frac{1}{2} mgR\cos\theta\right]} \tag{26}$$

Ricavando a questo punto le nuove coordinate lagrangiane $\mathbf{Q}$, e ricordando che le soluzioni delle nuove equzioni hamiltoniane sono:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \varphi + \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_1} = \text{cost} = \beta_1 \\ Q_2 &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \text{cost} + t = \beta_2 + t \end{aligned} \tag{27}$$

deduciamo le equazioni del moto per $\varphi(t), \theta(t)$:

$$\beta_1 = \varphi - \frac{2I_s\alpha_1}{I_d} \int d\theta \left[4I_s\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{2I_d} + \frac{1}{2} mgR\cos\theta\right)\right]^{-1/2} \tag{28}$$

$$\beta_2 + t = 2I_s \int d\theta \left[4I_s\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{2I_d} + \frac{1}{2} mgR\cos\theta\right)\right]^{-1/2} \tag{29}$$

Si osservi che dalla (25) segue che $p_\varphi = (\partial W / \partial \varphi) = \alpha_1 = cost$, e dalle (28)-(29) segue che:

$$\varphi(t) = \beta_1 + \frac{\alpha_1}{I_d}(\beta_2 + t) = \varphi(0) + \frac{\alpha_1}{I_d} t \tag{30}$$

Allo stesso risultato si poteva giungere direttamente dall'Hamiltoniana (20), in quanto:

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \text{cost} = \alpha_1 \\
\dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{I_d} \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\alpha_1}{I_d} t
\end{aligned} \tag{31}
$$

Punto (6)

Una volta data la trasformazione delle coordinate:

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \theta - \varphi \\ \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q} = \hat{\mathbf{J}}\mathbf{q}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

dobbiamo completare la trasformazione in modo tale che sia simplettica. Trattandosi di una trasformazione lineare, le relazioni:

$$
\{Q_h, P_k\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \delta_{h,k}, \quad \{Q_h, Q_k\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \{P_h, P_k\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = 0 \tag{32}
$$

le quali sono condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione di coordinate sia simplettica, sono soddisfatte se la matrice di trasformazione degli impulsi è data da $(\hat{J}^T)^{-1}$. Potremo quindi porre:

$$
\mathbf{P} = (\hat{\mathbf{J}}^{\mathbf{T}})^{-\mathbf{1}}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\varphi \\ p_\theta \end{pmatrix}
$$

da cui ricaviamo:

$$
\begin{cases} P_1 = -p_\theta \\ P_2 = p_\varphi + p_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_\varphi = -P_1 \\ p_\theta = P_1 + P_2 \end{cases}
$$

L'Hamiltoniana nelle nuove variabili è data da:

$$
H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{P_1^2}{2I_d} + \frac{(P_1 + P_2)^2}{4I_s} - \frac{1}{2} mgR \cos Q_2 - \frac{1}{2} kR^2 \cos Q_1 \tag{33}
$$