**Compito di esame del 18 Giugno 1996**

Due punti materiali $P_1$ e $P_2$ di masse $m_1$ e $m_2$ sono vincolati a muoversi in un piano verticale $\pi$ sotto le seguenti condizioni:

**a)** $P_1$ si muove su una retta verticale $a$ fissa;

**b)** $P_2$ si muove su una guida circolare di raggio $R$ con centro fisso $B$ sulla retta $a$;

**c)** $P_1$ e $P_2$ giacciono su una retta con un punto fisso $O$.

Tutti i vincoli sono ideali.

1. Determinare i gradi di libertà del sistema e le opportune variabili lagrangiane.
2. Determinare la lagrangiana e le equazioni del moto.
3. Discutere i punti di equilibrio e la relativa stabilità al variare del parametro $\lambda = m_1/m_2$.

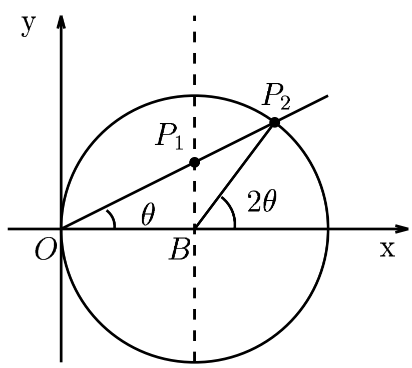


Figura 1: Dipendenza dall'angolo $\theta$ delle coordinate dei punti $P_1$ e $P_2$.

**Punto (1)**

Come si può osservare in Fig. 1, le coordinate di entrambi i punti sono esprimibili in funzione di un'unico angolo $\theta$, che costituisce quindi il solo grado di libertà del sistema (come segue dal bilancio tra i quattro gradi di libertà di partenza -le coordinate di $P_1$ e $P_2$- e le tre relazioni di vincolo (a)-(c)). Si ha che:

$$\begin{cases} x_1 = R \\ y_1 = R\tan\theta \end{cases} \Rightarrow v_1^2 = \left(\frac{R\dot{\theta}}{\cos^2\theta}\right)^2$$

$$\begin{cases} x_2 = R(1+\cos 2\theta) \\ y_2 = R\sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow v_2^2 = 4R^2\dot{\theta}^2$$

**Punto (2)**

L'energia cinetica complessiva è pari a:

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \frac{R^2\dot{\theta}^2}{\cos^4\theta} + \frac{1}{2}m_2 4R^2\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

e l'energia potenziale è data dall'energia potenziale gravitazionale dei due punti:

$$V(\theta) = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = m_1 g R\tan\theta + m_2 g R \sin 2\theta \tag{2}$$

La lagrangiana del sistema è $L = T - V$, per cui le equazioni di Eulero-Lagrange diventano:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \\ &\frac{m_1 R^2}{\cos^4\theta}\left(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\tan\theta\right) + 4m_2R^2\ddot{\theta} + gR\left(\frac{m_1}{\cos^2\theta} + 2m_2\cos 2\theta\right) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

**Punto (3)**

Per determinare le posizioni di equilibrio cerchiamo i punti di stazionarietà del potenziale (2):

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= gRm_2\left(\frac{\lambda}{\cos^2\theta} + 2\cos 2\theta\right) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda + 2\cos^2\theta(2\cos^2\theta - 1) = 0 \\ &\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{4} \end{aligned} \tag{4}$$

avendo introdotto il parametro $\lambda = m_1/m_2$. La natura dei punti di equilibrio è determinata dal segno della derivata seconda del potenziale:

$$V''(\theta) = 2gRm_2 \left( \lambda \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} - 4\cos\theta\sin\theta \right) =$$
$$= 2gRm_2 \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}(\lambda - 4\cos^4\theta) \qquad (5)$$

Ricavando $4\cos^4\theta$ dalla (4) (a noi interessa il segno di $V''$ nei punti di equilibrio $\theta_e$) avremo quindi:

$$V''(\theta_e) = 4gRm_2 \frac{\sin\theta_e}{\cos^3\theta_e}(\lambda - \cos^2\theta_e) \qquad (6)$$

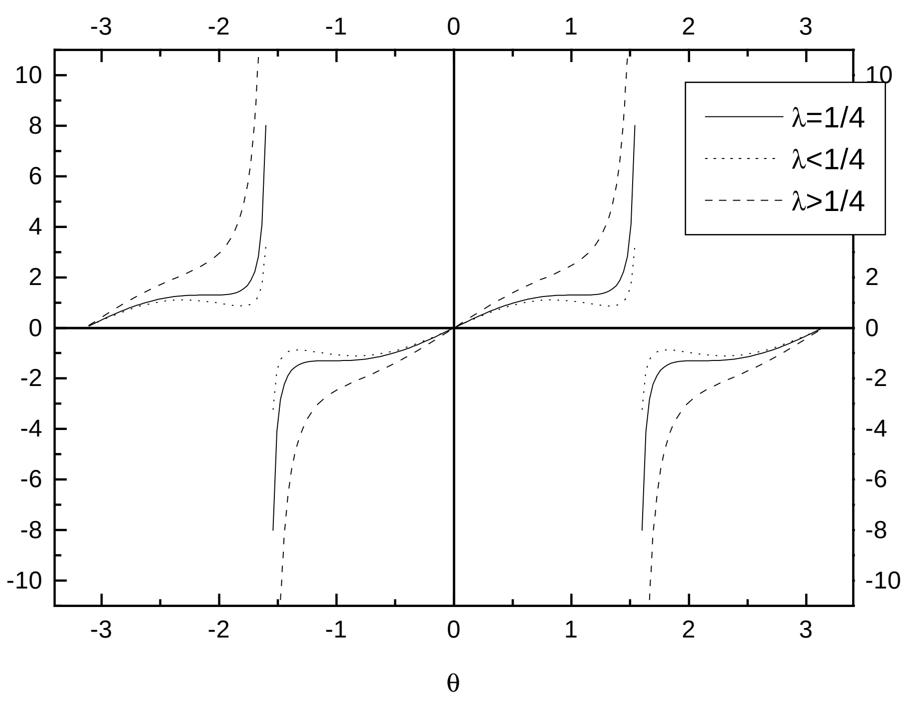


Figura 2: Energia potenziale al variare di $\lambda$.

A seconda del valore di $\lambda$ distinguiamo quindi tre casi, studiando solo le soluzioni a $0 < \theta < \pi$, essendo il potenziale (2) dispari:

1. $\lambda > \frac{1}{4}$: la (4) non ha soluzioni reali $\Rightarrow$ non ci sono punti di equilibrio;

2. $\lambda = \frac{1}{4}$: la (4) ha soluzione $\cos^2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{1,2} = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. Dalla (6) segue che $V''(\theta_{1,2}) = 0$, per cui ci serve conoscere anche le derivate successive per determinare la natura di tali punti. Poichè:

$$V'''(\theta_{1,2}) = 32gRm_2 \sin^2\theta_{1,2} = 16gRm_2 \tag{7}$$

ne segue che intorno ai punti di equilibrio $\theta_{1,2}$ il potenziale va come:

$$V(\theta) \simeq \frac{1}{3!}16gRm_2(\theta - \theta_{1,2})^3 \tag{8}$$

e quindi non sono punti di equilibrio stabile.

3. $\lambda < \frac{1}{4} \Rightarrow$ ho due soluzioni per $\cos^2\theta$, date da:

   - $\cos^2\theta = \frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{4} \Rightarrow \theta_{1,2} > 0$ in quanto ogni equazione per $\cos\theta$ ammette due soluzioni, una a $\theta > 0$ ed una a $\theta < 0$, che qui non analizziamo. La derivata seconda del potenziale in tali punti è data dalla (6), da cui:

   $$\lambda - \cos^2\theta_{1,2} < 0 \Rightarrow Sign(V''(\theta_{1,2})) = -Sign\left(\frac{\sin\theta_{1,2}}{\cos^3\theta_{1,2}}\right) \tag{9}$$

   e quindi di tali punti due sono di equilibrio stabile (quando $\sin\theta$ e $\cos\theta$ hanno segni opposti) e due di equilibrio instabile (quando $\sin\theta$ e $\cos\theta$ hanno stesso segno).

   - $\cos^2\theta = \frac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{4} \Rightarrow \theta_{3,4} > 0$ La derivata seconda del potenziale in tali punti vale in tal caso:

   $$\begin{aligned} \lambda - \cos^2\theta_{3,4} &= \frac{\sqrt{1-4\lambda} - (1-4\lambda)}{4} > 0 \Rightarrow \\ & Sign(V''(\theta_{3,4})) = Sign\left(\frac{\sin\theta_{3,4}}{\cos^3\theta_{3,4}}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

   e quindi di tali punti due sono di equilibrio stabile (quando $\sin\theta$ e $\cos\theta$ hanno stesso segno) e due di equilibrio instabile (quando $\sin\theta$ e $\cos\theta$ hanno segno opposto).

Riassumendo, si hanno in tutto due punti di equilibrio stabile e due di equilibrio instabile per $\theta > 0$, e altrettanti per $\theta < 0$, come si osserva in Fig. 2.