Esonero di Meccanica Razionale del 5-6-1998

Esercizio 2

Si consideri la lagrangiana:

$$\mathcal{L}(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r} - \frac{\cos^2\theta}{r^2}$$

dove $r \in \mathbf{R}_+$, $k > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

1. determinare l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton;
2. scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi e integrarla per separazione di variabili;
3. determinare, dove possibile, le variabili d'azione e determinare le frequenze del sistema come integrali definiti.

Punto (1)
I momenti coniugati alle variabili lagrangiane r, θ sono:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \end{aligned} \tag{1}$$

Sostituendo $\dot{r}, \dot{\theta}$ con le corrispondenti funzioni di p_r, p_θ nell'espressione di L e ricordando che $H = T + V$, abbiamo:

$$H(r,\theta,p_r,p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2} \tag{2}$$

Le equazioni di Hamilton sono quindi:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} + 2\frac{\cos^2\theta}{r^3} \tag{3}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 2\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} \tag{4}$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \tag{5}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \tag{6}$$

Punto (2)

Trattandosi di un'Hamiltoniana indipendente dal tempo, possiamo cercare una funzione generatrice del tipo:

$$F(r,\theta,\alpha_1,\alpha_2) = W(r,\theta,\alpha_1,\alpha_2) - \alpha_2 t \tag{7}$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi assume quindi la forma:

$$\begin{aligned} H\left(r,\theta,\frac{\partial W}{\partial r},\frac{\partial W}{\partial \theta}\right) &= \alpha_2 \Rightarrow \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{k}{r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2} &= \alpha_2 \end{aligned} \tag{8}$$

Cerchiamo una soluzione per separazione di variabili, ponendo:

$$W(r,\theta,\alpha_1,\alpha_2) = W_r(r,\alpha_1,\alpha_2) + W_\theta(\theta,\alpha_1,\alpha_2) \tag{9}$$

La (8) può quindi essere ricondotta alle due equazioni:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \cos^2\theta = \alpha_1 \tag{10}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{k}{r} = \alpha_2 \tag{11}$$

le cui soluzioni sono:

$$W_\theta^\pm = \pm\int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{2m(\alpha_1 - \cos^2\theta')}\,d\theta' \tag{12}$$

$$W_r^\pm = \pm\int_{r_0}^{r} \sqrt{2m\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{(r')^2} + \frac{k}{r'}\right)}\,dr' \tag{13}$$

Ovviamente le precedenti sono ben definite sono per i valori di θ, r che soddisfano le due disuguaglianze:

$$\alpha_1 \geq \cos^2\theta \tag{14}$$

$$\alpha_2 \geq \frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{k}{r} \tag{15}$$

Dalla (14) abbiamo anzitutto $\alpha_1 \geq 0$; se poi $\alpha_1 \leq 1$, indicando con $0 \leq \theta_+, \theta_- \leq \pi$ le soluzioni di $\cos^2\theta = \alpha_1$, dovrà essere:

$$\theta \epsilon I_\theta, \quad I_\theta = \{\theta : 1 \geq \alpha_1 \geq \cos^2\theta\} = [\theta_-, \theta_+] \cup [\pi + \theta_-, \pi + \theta_+] \tag{16}$$

Dalla (15) segue che l'uguaglianza:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{k}{r} \tag{17}$$

ammette una sola soluzione r_0 se $\alpha_2 > 0$, e due soluzioni r_-, r_+ se $\alpha_2 < 0$, con $\alpha_2 \geq -k^2/4\alpha_1$. Quindi l'intervallo di variabilità della r è:

$$r \epsilon I_r = \left\{ r : \alpha_2 \geq \frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{k}{r} \right\} \Rightarrow$$

$$I_r = [r_-, r_+] \quad \text{se} \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0 \tag{18}$$

$$I_r = [r_0, \infty) \quad \text{se} \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 \geq 0 \tag{19}$$

Punto (3)

Per definire le variabili di azione J_θ, J_r dobbiamo individuare gli intervalli di moto periodico per le coordinate θ, r. Dalla discussione del punto precedente segue che:

$$\alpha_1 \,\epsilon\, (0,1),\ \theta \,\epsilon\, I_\theta \Rightarrow J_\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \sqrt{2m(\alpha_1 - \cos^2\theta)}d\theta \tag{20}$$

$$\alpha_1 \geq 1,\ \theta \,\epsilon\, [0, 2\pi) \Rightarrow J_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{2m(\alpha_1 - \cos^2\theta)}d\theta \tag{21}$$

$$\alpha_2 \,\epsilon\, \left(-\frac{k^2}{4\alpha_1}, 0\right),\ r \,\epsilon\, [r_-, r_+] \Rightarrow J_r = \frac{1}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} \sqrt{2m\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{r^2} + \frac{k}{r}\right)}dr \tag{22}$$

Le frequenze del sistema sono date (ricordando che per la (8) l'Hamiltoniana nelle nuove variabili coincide con α_2) da:

$$\nu_r = \frac{\partial \alpha_2}{\partial J_r} = \frac{1}{\frac{\partial J_r}{\partial \alpha_2}} \tag{23}$$

$$\nu_\theta = \frac{\partial \alpha_2}{\partial J_\theta} = -\frac{\frac{\partial J_r}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial J_r}{\partial \alpha_2}\frac{\partial J_\theta}{\partial \alpha_1}} \tag{24}$$

dove, secondo le (20)-(22), avremo:

$$\frac{\partial J_r}{\partial \alpha_1} = -\frac{m}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} \frac{1}{r^2 \sqrt{2m\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{r^2} + \frac{k}{r}\right)}} dr \tag{25}$$

$$\frac{\partial J_r}{\partial \alpha_2} = \frac{m}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} \frac{1}{\sqrt{2m\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{r^2} + \frac{k}{r}\right)}} dr \tag{26}$$

$$\frac{\partial J_\theta}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{m}{\sqrt{2m(\alpha_1 - \cos^2\theta)}} d\theta \quad \text{se} \quad \alpha_1 \,\epsilon\, (0,1) \tag{27}$$

$$\frac{\partial J_\theta}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{m}{\sqrt{2m(\alpha_1 - \cos^2\theta)}} d\theta \quad \text{se} \quad \alpha_1 \geq 1 \tag{28}$$