Compito d'esame di Meccanica Razionale: 28-9-99

E. Scoppola, R. Raimondi

Esercizio 2

Il moto di una particella in un piano è descritto dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + h\dot{y}x.$$

1. Calcolare la funzione di Hamilton.
2. Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi.
3. Trovare l'equazione dell'orbita (facoltativo).

Punto (1)

Determiniamo i momenti coniugati alle variabili x, y:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \tag{1}$$

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \rightarrow \dot{y} = \frac{p_y - hx}{m} \tag{2}$$

L'Hamiltoniana corrispondente è quindi data da:

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \mathcal{L}(p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y - hx)^2}{2m} \tag{3}$$

Punto (2)

L'equazione di Hamilton-Jacobi per l'hamiltoniana (3) è:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - hx\right)^2 = \alpha_2 \tag{4}$$

Risolviamola per separazione di variabili, ponendo:

$$W(x, y, \alpha_1, \alpha_2) = W_x(x, \alpha_1, \alpha_2) + W_y(y, \alpha_1, \alpha_2) \tag{5}$$

La (4) è quindi equivalente alla coppia di equazioni:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\alpha_1 - hx\right)^2 = \alpha_2 \tag{6}$$

$$\frac{\partial W_y}{\partial y} = \alpha_1 \tag{7}$$

le cui soluzioni sono:

$$W_x(x,\alpha_1,\alpha_2) = \pm\int_{x(0)}^{x} \sqrt{2m\alpha_2 - (\alpha_1 - hx')^2} \quad dx' \tag{8}$$

$$W_y(y,\alpha_1) = \alpha_1 y \tag{9}$$

Le equazioni del moto per le nuove variabili (η_1, η_2) corrispondenti ai nuovi momenti coniugati (α_1, α_2) si traducono nelle seguenti relazioni per le derivate parziali della funzione caratteristica di Hamilton $W(x, y, \alpha_1, \alpha_2)$:

$$\eta_1 = \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \qquad \beta_1 = \text{cost} \tag{10}$$

$$\eta_2 = \beta_2 + t = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \qquad \beta_2 = \text{cost} \tag{11}$$

Utilizzando la definizione (5) di W e le relazioni (8)-(9), otteniamo:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial W_x}{\partial \alpha_1} + y = \\ &= \mp\int_{x(0)}^{x} \frac{\alpha_1 - hx'}{\sqrt{2m\alpha_2 - (\alpha_1 - hx')^2}} \quad dx' + y \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 + t &= \frac{\partial W_x}{\partial \alpha_2} = \\ &= \mp\int_{x(0)}^{x} \frac{m}{\sqrt{2m\alpha_2 - (\alpha_1 - hx')^2}} \quad dx' \end{aligned} \tag{13}$$

Di queste due equazioni la (13) definisce la dipendenza dal tempo della variabile $x(t)$, mentre la (12) è una relazione implicita tra le due coordinate lagrangiane x, y, che definisce appunto l'equazione dell'orbita. Per chiarirne il significato risolviamo l'integrale che compare nella (12). Ponendo $z' = (\alpha_1 - hx')^2$ abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W_x}{\partial \alpha_1} &= \pm \frac{1}{2h} \int_{z(0)}^{z} \frac{1}{\sqrt{2m\alpha_2 - z'}} \quad dz' = \\
&= \mp \left. \frac{\sqrt{2m\alpha_2 - z'}}{h} \right|_{z(0)}^{z} = \mp \frac{\sqrt{2m\alpha_2 - (\alpha_1 - hx)^2}}{h} + c \qquad (14)
\end{aligned}
$$

dove con c si è indicata una costante dipendente dalle condizioni iniziali. Sostituendo la precedente nella (12) otteniamo:

$$
\begin{gathered}
\beta_1 - c - y = \mp \frac{\sqrt{2m\alpha_2 - (\alpha_1 - hx)^2}}{h} \Rightarrow \\
\left(x - \frac{\alpha_1}{h} \right)^2 + (y - \beta_1 - c)^2 = \frac{2m\alpha_2}{h^2} \qquad (15)
\end{gathered}
$$

cioè l'equazione di una circonferenza.