

RECUPERO ESONERO DI MECCANICA RAZIONALE

18-6-98

Esercizio recupero III esonero

Si consideri l'hamiltoniana:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{(p_1 + p_2)^2}{8} + \frac{1}{4} \frac{(p_1 - p_2)^2}{(q_1 + q_2)^2} + \frac{1}{2} k \frac{(q_1 - q_2)^2}{(q_1 + q_2)^2} + h(q_1 + q_2)^2$$

con $h, k > 0$.

1. determinare la trasformazione simplettica tale che

$$Q_1 = q_1 + q_2$$

$$Q_2 = q_1 - q_2$$

e determinare la nuova hamiltoniana nelle variabili Q_1, Q_2, P_1, P_2 ;

2. discutere la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi per l'hamiltoniana trovata al punto 1);
3. determinare, ove possibile, le variabili d'azione e le frequenze.

Punto (1)

Per estendere la trasformazione nello spazio delle configurazioni ad una trasformazione nello spazio delle fasi dobbiamo determinare i nuovi momenti coniugati $\mathbf{P}^T = (P_1, P_2)$ come:

$$\mathbf{P} = (\hat{J}_q^T)^{-1} \mathbf{p} \quad (1)$$

dove $\mathbf{p}^T = (p_1, p_2)$ e $\hat{J}_q$ è lo jacobiano della trasformazione di coordinate lagrangiane:

$$\hat{J}_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} \end{pmatrix}.$$

Avremo quindi:

$$\hat{J}_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{p}$$

cioè:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{p_1 + p_2}{2} \\ P_2 &= \frac{p_1 - p_2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

La nuova hamiltoniana nelle variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2) è:

$$K(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = \frac{P_1^2}{2} + \frac{1}{Q_1^2} \left[P_2^2 + \frac{1}{2} k Q_2^2 \right] + h Q_1^2 \quad (3)$$

Punto (2)

L'equazione di Hamilton-Jacobi per l'hamiltoniana (3):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1} \right)^2 + \frac{1}{Q_1^2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial Q_2} \right)^2 + \frac{1}{2} k Q_2^2 \right] + h Q_1^2 = \alpha_2 \quad (4)$$

è risolubile per separazione di variabili. Ponendo:

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(Q_1, \alpha_1, \alpha_2) + W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2) \quad (5)$$

l'equazione (4) diventa:

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2} \right)^2 + \frac{1}{2} k Q_2^2 = \alpha_1 \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1} \right)^2 + \frac{\alpha_1}{Q_1^2} + h Q_1^2 = \alpha_2 \quad (7)$$

Le due funzioni W_1, W_2 sono quindi definite da:

$$W_2(Q_2, \alpha_1) = \pm \int_{Q_2(0)}^{Q_2} \sqrt{\alpha_1 - \frac{1}{2} k \tilde{Q}_2^2} \, d\tilde{Q}_2 \quad (8)$$

con $\alpha_1 \geq 0$ (per la (6)) e $\tilde{Q}_2 \epsilon I_{\alpha_1} = [Q_{2-}, Q_{2+}]$, dove $Q_{2\pm}$ sono le soluzioni dell'equazione $\alpha_1 = \frac{1}{2} k Q_2^2$;

$$W_1(Q_1, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int_{Q_1(0)}^{Q_1} \sqrt{2 \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{\tilde{Q}_1^2} - h\tilde{Q}_1^2 \right)} d\tilde{Q}_1 \quad (9)$$

con $\alpha_2 \geq U(\alpha_1, Q_1) = \alpha_1/Q_1^2 + hQ_1^2$.

Punto (3)

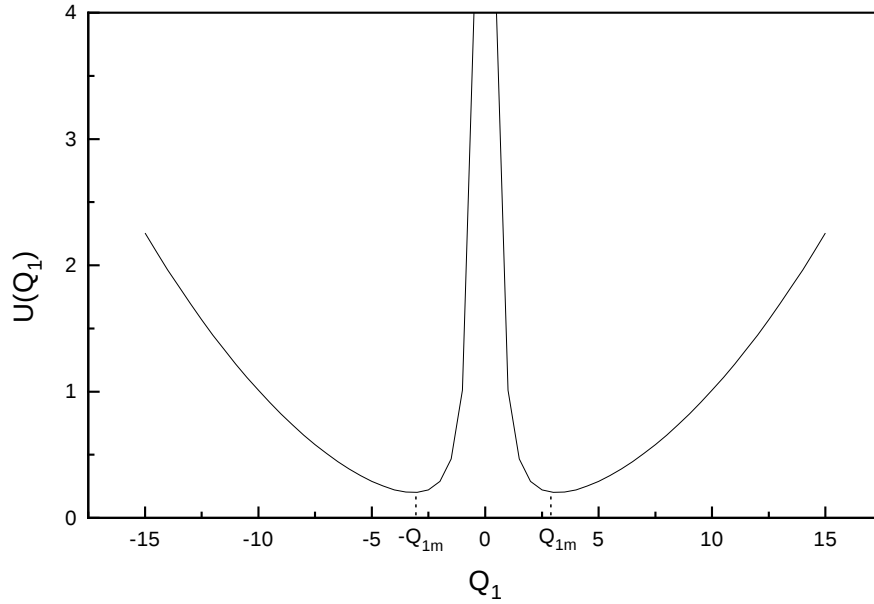


Figura 1: Andamento della funzione $U(\alpha_1, Q_1)$ al variare di Q_1 per $\alpha_1 = 1$ e $h = 0.01$.

Per definire le variabili di azione, dobbiamo individuare gli intervalli di moto periodico per le coordinate Q_1, Q_2 . Lo studio della W_2 ha già mostrato che la variabile Q_2 è limitata, per ogni scelta di $\alpha_1 \geq 0$, all'intervallo I_{α_1} . Per la variabile Q_1 , dobbiamo studiare la funzione $U(\alpha_1, Q_1)$ che entra nella definizione (9) della W_1 . Come si osserva in Fig. 1, la funzione U diverge sia in $Q_1 = 0$ che per $Q_1 \rightarrow \infty$, ed ha due minimi nelle soluzioni di:

$$U'(Q_1) = -\frac{2\alpha_1}{Q_1^3} + 2hQ_1 = 0 \quad (10)$$

cioè per $Q = Q_{1m} = \pm \left(\frac{\alpha_1}{h}\right)^{1/4}$, con $U(Q_{1m}) = 2\sqrt{h\alpha_1}$. Ne segue che la condizione $\alpha_2 \geq U(\alpha_1, Q_1)$ è soddisfatta per $\alpha_2 \geq 2\sqrt{h\alpha_1}$ e $Q_1 \in I_{\alpha_1, \alpha_2} = [Q_{1-}, Q_{1+}] \cup [-Q_{1+}, -Q_{1-}]$, con $Q_{1\pm}$ soluzioni di $\alpha_2 = U(\alpha_1, Q_1)$.

Ne concludiamo che i moti dei problemi unidimensionali sono periodici se:

$$\alpha_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha_2 \geq 2\sqrt{h\alpha_1} \quad (11)$$

Le variabili d'azione sono pertanto:

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_{Q_{1-}}^{Q_{1+}} \sqrt{2 \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{Q_1^2} - hQ_1^2 \right)} dQ_1 \quad (12)$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{Q_{2-}}^{Q_{2+}} \sqrt{\alpha_1 - \frac{1}{2}kQ_2^2} dQ_2 \quad (13)$$

Le corrispondenti frequenze sono:

$$\nu_1 = \frac{\partial a_2(\mathbf{J})}{\partial J_1} = \frac{-\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}} \quad (14)$$

$$\nu_2 = \frac{\partial a_2(\mathbf{J})}{\partial J_2} = \frac{-\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}} \quad (15)$$

dove:

$$\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{\pi} \int_{Q_{1-}}^{Q_{1+}} \frac{1}{Q_1^2 \sqrt{2 \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{Q_1^2} - hQ_1^2 \right)}} dQ_1 \quad (16)$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{\pi} \int_{Q_{1-}}^{Q_{1+}} \frac{1}{\sqrt{2 \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{Q_1^2} - hQ_1^2 \right)}} dQ_1 \quad (17)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{Q_{2-}}^{Q_{2+}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 - \frac{1}{2}kQ_2^2}} dQ_2 \quad (18)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (19)$$