MECCANICA STATISTICA CLASSICA - ESERCIZI

1. DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' ED ENTROPIA, ENSEMBLE MICROCANONICO

Esercizio 1

Si consideri una distribuzione di probabilitá su $\mathbf{R}$ con densitá

$$p(x) = Cx^{-\frac{3}{2}}\chi_{(x\geq 1)}$$

dove con χ indichiamo la funzione caratteristica.

1) Calcolare il valore della costante C
2) Determinare l'entropia della distribuzione

Soluzione

1) Dalla condizione di normalizzazione $\int p(x)dx = 1$ otteniamo

$$C\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}} = C(-2x^{-\frac{1}{2}}|_1^\infty) = 2C = 1$$

da cui $C = \frac{1}{2}$.

2) Calcoliamo l'entropia della distribuzione:

$$S = -\int_1^\infty dx\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{2}\log(\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{2}) =$$

$$= -\int_1^\infty dx\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{2}(-\frac{3}{2}\log x - \log 2) = \frac{3}{4}\int_1^\infty dx\log(x)x^{-\frac{3}{2}} + \log 2 = 3 + \log 2$$

Esercizio 2

Si consideri un gas perfetto di N atomi, in un volume V ad energia U fissata. Come cambia l'entropia se il volume é raddoppiato?

Soluzione

Per un gas perfetto nell'ensemble microcanonico abbiamo

$$S(U,V,N) = k \log \Omega_{U,V,N}$$

con

$$\Omega_{U,V,N} = \big[V(\frac{4\pi m U}{N})^{\frac{3}{2}}\big]^N e^{\frac{3}{2}N} (\frac{2}{3N})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{U\sqrt{2\pi}}$$

da cui otteniamo

$$S(U,2V,N) - S(U,V,N) = k \log \frac{\Omega_{U,2V,N}}{\Omega_{U,V,N}} = k \log (\frac{2V}{V})^N = kN \log 2$$

2. ENSEMBLE CANONICO

Esercizio 1
Calcolare la velocitá quadratica media nell'ensemble canonico.

Soluzione

$$v^2 \equiv E_{\mu_{\beta,V,N}}\big(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} (\frac{|\mathbf{p}_i|}{m})^2\big) =$$

$$= \frac{2}{m} E_{\mu_{\beta,V,N}}(\frac{\mathcal{T}}{N}) = \frac{3kT}{m} = \frac{3}{\beta m}$$

Esercizio 2
Calcolare nell'ensemble canonico:

$$v^n \equiv E_{\mu_{\beta,V,N}}\big(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} (\frac{|\mathbf{p}_i|}{m})^n\big)$$

Soluzione

$$v^n = \frac{1}{Z^c}\frac{1}{N!}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\int_\Gamma d\mathbf{p}^N d\mathbf{q}^N (\frac{|\mathbf{p}_i|}{m})^n e^{-\beta\sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m}-\beta\Phi(\mathbf{q}^N)} =$$

$$\frac{\int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p}(\frac{|\mathbf{p}|}{m})^n e^{-\beta\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}}}{\int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p} e^{-\beta\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}}} \tag{2.1}$$

Calcoliamo l'integrale al numeratore in coordinate sferiche:

$$\int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p}(\frac{|\mathbf{p}|}{m})^n e^{-\beta\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}} =$$

$$= \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dp p^2 (\frac{p}{m})^n e^{-\beta\frac{p^2}{2m}=2\pi 2\frac{1}{m^n}\int_0^\infty dp p^{2+n} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}}$$

Ricordando che

$$\int_0^\infty dx x^k e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2}\alpha^{-\frac{k+1}{2}}\Gamma(\frac{k+1}{2})$$

e che l'integrale al denominatore di (2.1) vale $(\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}}$
otteniamo:

$$v^n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\frac{2}{m\beta})^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n+3}{2})$$

Esercizio 3

Calcolare l'energia cinetica media, il suo quadrato medio ed il quadrato medio della sua fluttuazione, per un atomo nell'ensemble canonico.

Soluzione

Calcoliamo:

$$\bar{\epsilon} \equiv E_{\mu_{\beta,V,N}}(\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m})$$

$$\bar{\epsilon^2} \equiv E_{\mu_{\beta,V,N}}(\frac{|\mathbf{p}|^4}{4m^2})$$

$$(\bar{\Delta\epsilon})^2 \equiv E_{\mu_{\beta,V,N}}\big((\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} - \bar{\epsilon})^2\big) = \bar{\epsilon^2} - (\bar{\epsilon})^2 \tag{2.2}$$

abbiamo:

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT$$

usando il risultato dell'esercizio 2 abbiamo:

$$\bar{\epsilon^2} = \frac{1}{4}m^2v^4 = \frac{1}{4}(\frac{2}{\beta})^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{7}{2}) \tag{2.3}$$

Funzione Γ

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-y}y^{z-1}dy$$

Integrando per parti si ottiene immediatamente:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.4}$$

da cui, poiche' $\Gamma(1) = 1$, si ha per ogni intero n:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Calcolando $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ed utilizzando ancora (2.4), si ottiene:

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}, \quad ...$$

Inserendo in (2.3) il valore della funzione $\Gamma(\frac{7}{2})$ otteniamo:

$$\bar{\epsilon^2} = \frac{15}{4}(kT)^2$$

$$(\bar{\Delta\epsilon})^2 = \frac{3}{2}(kT)^2$$

Esercizio 4
Dato un sistema di N particelle di massa m su $\mathbf{R}$ con

$$\Phi(x_1,...,x_N) = \phi(x_1) + \phi(x_2 - x_1) + ... + \phi(x_N - x_{N-1})$$

con x_i coordinata della i-esima particella e definendo

$$\phi(x) = (x-a)\phi_0 \quad \text{ per } x \geq a$$

e

$$\phi(x) = \infty \quad \text{ per } x < a$$

con a, ϕ_0 costanti positive.
Determinare Z^c, $E_{\mu_{\beta,V,N}}(H)$ e la lunghezza media del sistema $E_{\mu_{\beta,V,N}}(x_N)$.

Soluzione
Cambiamo coordinate:

$$\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2 - x_1, ..., \xi_N = x_N - x_{N-1}$$

Abbiamo

$$H(p^N, \xi^N) = \sum_{i=1}^{N} \big(\frac{p_i^2}{2m} + \phi(\xi_i)\big)$$

da cui

$$Z^c = \frac{1}{N!}\big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}dp \int_a^{\infty} e^{-\beta\phi_0(\xi-a)}d\xi\big)^N =$$

$$= \frac{1}{N!}\big(\frac{2\pi m}{\beta}\big)^{\frac{N}{2}}\big(\frac{1}{\beta\phi_0}\big)^N = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{N!}\frac{1}{\beta^{\frac{3}{2}N}}\frac{1}{\phi_0^N}$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z^c = \frac{3}{2}NkT$$

$$E_{\mu_{\beta,V,N}}(x_N) = \frac{1}{N!}\frac{1}{Z^c}\big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}dp\big)^N \int_a^{\infty} d\xi_1 .... \int_a^{\infty} d\xi_N \sum_{i=1}^{N} \xi_i e^{-\beta\sum_{j=1}^{N}\phi_0(\xi_j - a)} =$$

$$= \frac{1}{N!}\frac{1}{Z^c}\big(\frac{2\pi m}{\beta}\big)^{\frac{N}{2}}\big(\frac{1}{\beta\phi_0}\big)^{N-1}N\big(\frac{a}{\beta\phi_0}+\frac{1}{(\beta\phi_0}\big)^2\big) = N\big(a+\frac{1}{\beta\phi_0}\big)$$

Esercizio 5

Trovare la densitá di un gas di N particelle identiche contenuto in un cilindro di raggio R e altezza h che ruota attorno al suo asse a velocitá angolare costante Ω. Calcolarne anche l'energia media.

Soluzione

$$H(\mathbf{p}^N,\mathbf{q}^N) = \sum_{i=1}^{N}\big(\frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m} - \frac{1}{2}m\Omega^2 r_i^2\big)$$

con r_i distanza dall'asse di rotazione della i-esima particella.

Indicando con $n(r)dr$ il numero di particelle nel volume cilindrico tra r e $r+dr$, abbiamo che la densitá $\rho(r)$ di particelle a distanza r dall'asse, é data da

$$\rho(r) = \frac{n(r)}{2\pi rh}$$

Calcoliamo il valore medio del numero $n(r)dr$ di particelle:

$$E_{\mu_{\beta,V,N}}(n(r)dr) = \frac{1}{N!}\frac{1}{Z^c}\int_\Gamma \sum_{i=1}^{N}\chi^i_{(r,r+dr)}e^{-\beta H(\mathbf{p}^N,\mathbf{q}^N)}d\mathbf{p}^N d\mathbf{q}^N$$

dove $\chi^i_{(r,r+dr)}$ é la funzione caratteristica che la particella i-esima abbia distanza dall'asse in $(r, r+dr)$.

Abbiamo

$$E_{\mu_{\beta,V,N}}(n(r)dr) = \sum_{i=1}^{N}\frac{e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2r^2}2\pi hr}{\int_V e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2r^2}}dr$$

infatti tutti gli altri integrali si fattorizzano e si semplificano tra numeratore e denominatore, da cui:

$$E_{\mu_{\beta,V,N}}(n(r)dr) = N\frac{e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2r^2}2\pi hrdr}{\int_0^R\int_0^h dz\int_0^{2\pi} rd\theta e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2r^2}dr} = N\frac{e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2r^2}rdr}{\frac{1}{\beta m\Omega^2}(e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2R^2}-1)} =$$

$$= \frac{N\beta m\Omega^2 e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2 r^2} r dr}{(e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2 R^2} - 1)}$$

da cui otteniamo

$$\rho(r) = \frac{N\beta m\Omega^2 e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2 r^2}}{2\pi h(e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2 R^2} - 1)}$$

Calcoliamo la funzione di partizione:

$$Z^c = \frac{1}{N!}\Big(\frac{2\pi m}{\beta}\Big)^{\frac{3}{2}N}\Big(\int_V e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2 r^2}\mathbf{q}\Big)^N =$$

$$= \frac{1}{N!}\Big(\frac{2\pi m}{\beta}\Big)^{\frac{3}{2}N}\Big(\frac{2\pi h}{\beta m\Omega^2}(e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2 R^2} - 1)\Big)^N$$

da cui otteniamo

$$U = -\frac{\partial \log Z^c}{\partial\beta} = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\log\beta^{-\frac{5}{2}} + \log(e^{\beta\frac{m}{2}\Omega^2 R^2} - 1)\Big) =$$

$$= \frac{5}{2}NkT - N\frac{m}{2}\Omega^2 R^2 \frac{1}{1 - e^{-\beta\frac{m}{2}\Omega^2 R^2}}$$

Esercizio 6

Determinare il lavoro fornito ad un gas perfetto per il cambiamento isotermo del suo volume da V_1 a V_2.

Soluzione

Su un'isoterma $dF = dU - TdS = -dL$ e sapendo che $F = -\frac{1}{\beta}\log Z^c$, abbiamo per un gas perfetto:

$$\Delta F = F(V_2) - F(V_1) = -kTN\log(\frac{V_2}{V_1})$$

Esercizio 7

Si considerino due gas perfetti identici a temperatura T e con N particelle a pressioni P_1 e P_2 diverse. Trovare la variazione di entropia quando si uniscono i due recipienti.

Soluzione

Per i recipienti separati:

$$S = S_1 + S_2$$

con $S_i = k(\beta \frac{3}{2} NkT + \log Z_i^c)$ da cui

$$S = k(3N + \log(Z_1^c Z_2^c))$$

Per i recipienti uniti abbiamo

$$S' = k(\beta U' + \log Z'^c) = k(3N + \log Z'^c)$$

da cui

$$S' - S = k \log(\frac{Z'^c}{Z_1^c Z_2^c})$$

Usando la forma esplicita della funzione di partizione per un gas perfetto:

$$Z'^c = \frac{(V_1 + V_2)^{2N}}{2N!} (\frac{2\pi m}{\beta})^{3N}$$

$$Z_1^c = \frac{V_1^N}{N!} (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}N}$$

con $V_1 = \frac{NkT}{P_1}$ e

$$Z_2^c = \frac{V_2^N}{N!} (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}N}$$

con $V_2 = \frac{NkT}{P_2}$, da cui

$$S' - S = kN \frac{(P_1 - P_2)^2}{4P_1 P_2}$$

Esercizio 8

Calcolare la funzione di partizione e l'energia media per un gas di N oscillatori armonici unidimensionali indipendenti.

Soluzione
Abbiamo

$$H = \sum_{i=1}^{N} (\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2)$$

e dunque

$$Z^c = \frac{1}{N!} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{p_i^2}{2m}} dp \Big)^N \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{m\omega^2 q^2}{2}} dq \Big)^N = \frac{1}{N!} (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{N}{2}} (\frac{2\pi}{\beta m\omega^2})^{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N!} (\frac{2\pi}{\beta\omega})^N$$

da cui otteniamo

$$U = -\frac{\partial \log Z^c}{\partial \beta} = NkT$$

in accordo col teorema di equipartizione dell'energia.

Esercizio 9
Si consideri un gas di N particelle vincolate alla superficie di una sfera di raggio R soggette alla forza peso. Determinare la funzione di partizione e l'energia media.

Soluzione
Scriviamo l'hamiltoniana in coordinate sferiche:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2mR^2} (p_{\theta_i}^2 + \frac{p_{\phi_i}^2}{\sin^2 \theta_i}) + \sum_{i=1}^{N} mgR \cos \theta_i$$

la funzione di partizione é data da:

$$Z^c = \frac{1}{N!} \Big(\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} dp_\phi \int_{-\infty}^{+\infty} dp_\theta e^{-\beta [\frac{1}{2mR^2} (p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}) + mgR\cos\theta]} \Big)^N =$$

$$= \frac{1}{N!} \Big(2\pi (\frac{2\pi m R^2}{\beta})^{\frac{1}{2}} (\frac{2\pi m R^2}{\beta})^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta e^{-\beta m g R \cos\theta} \Big)^N =$$

$$= \frac{1}{N!}\Big(\frac{4\pi^2 R}{\beta^2 g}(e^{\beta mgR} - e^{-\beta mgR})\Big)^N = \frac{1}{N!}\Big(\frac{8\pi^2 R}{\beta^2 g}\mathrm{sh}(\beta mgR)\Big)^N$$

da cui

$$U = -\frac{\partial \log Z^c}{\partial \beta} = -N(-2kT + mgR\mathrm{ctgh}(\beta mgR))$$

Esercizio 10

Un punto materiale di massa m é vincolato a muoversi lungo l'asse x sotto l'azione di un campo di forze conservativo di energia potenziale:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2 & \text{se } x \leq -a \\ 0 & \text{se } a \in [-a, a] \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2 & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

con a costante positiva. Supponendo il sistema a contatto con un termostato a temperatura T, calcolare la funzione di partizione canonica e l'energia media.

Soluzione

$$Z^c = \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\beta V(x)} =$$

$$= (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{1}{2}}\Big[\int_{-\infty}^{-a} e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2}(x+a)^2}dx + \int_{-a}^{a} dx + \int_{a}^{\infty} e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2}(x-a)^2}dx\Big] =$$

$$= (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{1}{2}}\Big[2\int_0^{\infty} e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2}y^2}dy + 2a\Big] =$$

$$= (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{1}{2}}\Big[(\frac{2\pi}{\beta m\omega^2})^{\frac{1}{2}} + 2a\Big] = \frac{2\pi}{\beta\omega} + (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{1}{2}}2a$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta}\log Z^c = \frac{1}{2}kT + \frac{\pi(kT)^2}{2\pi\omega kT + 2a\omega(2\pi kTm)^{\frac{1}{2}}}$$

Esercizio 11

Consideriamo un sistema di N punti materiali di massa m che si muovono lungo l'asse x sotto l'azione di un campo di forze di energia potenziale:

$$V(x_1, ..., x_N) = v(x_1) + v(x_2 - x_1) + ... + v(x_N - x_{N-1})$$

con

$$v(x) \begin{cases} \infty & \text{se } x < a \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2 & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

con a costante positiva. Supponendo il sistema a contatto con un termostato a temperatura T, calcolare la funzione di partizione canonica e l'energia media, la lunghezza media del sistema $< x_N >$ ed il coefficiente di dilatazione termica $\frac{1}{<x_N>} \frac{\partial}{\partial T} < x_N >$.

Soluzione

Consideriamo le variabili:

$$\xi_1 = x_1,\ \xi_2 = x_2 - x_1,\ ....,\ \xi_N = x_N - x_{N-1}$$

Abbiamo:

$$Z^c = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_1 .... \int_{-\infty}^{+\infty} dp_N e^{-\beta \sum_{i=1}^{N} \frac{pi^2}{2m}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 e^{-\beta v(\xi_1)} .... \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_N e^{-\beta v(\xi_N)}$$

$$= (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{N}{2}} \Big(\int_a^{+\infty} d\xi e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2}(\xi - a)^2} \Big)^N = (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{N}{2}} \Big(\frac{1}{2} (\frac{2\pi}{\beta m \omega^2})^{\frac{1}{2}} \Big)^N = (\frac{\pi}{\omega\beta})^N$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z^c = NkT$$

$$< x_N > \equiv E_{\mu_{\beta,V,N}} (\sum_{k=1}^{N} \xi_k) = \frac{N \int_a^{+\infty} d\xi\, \xi e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2}(\xi-a)^2}}{\int_a^{+\infty} d\xi e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2}(\xi-a)^2}} =$$

$$= \frac{N}{\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{\beta m\omega^2})^{\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} dy\, y e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} y^2} + a \int_0^{+\infty} dy e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} y^2} =$$

$$= Na + \frac{N}{\beta m \omega^2} 2 (\frac{\beta m \omega^2}{2\pi})^{\frac{1}{2}} = Na + \frac{2N}{\omega} (\frac{kT}{2\pi m})^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{< x_N >}\frac{\partial}{\partial T} < x_N >= \frac{N}{\omega}(\frac{k}{2\pi m})^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}$$

Esercizio 12

Un punto materiale di massa m é vincolato a muoversi su un paraboloide circolare liscio di equazione $z = x^2 + y^2$ sotto l'azione di una forza conservativa con energia potenziale $V = V_0\sqrt{1+4z}$, con V_0 costante positiva. Usando le coordinate lagrangiane $r \in [0,\infty), \phi \in [0, 2\pi)$:

1) scrivere l'hamiltoniana del problema

2) supponendo il sistema a temperatura costante T, calcolare la funzione di partizione canonica.

Soluzione

Abbiamo la lagrangiana::

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + 4r^2\dot{r}^2) - V$$

da cui otteniamo

$$H = \frac{1}{2m}(\frac{p_r^2}{1+4r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2}) + V$$

e quindi

$$Z^c = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty dp_r \int_{-\infty}^\infty dp_\phi e^{-\frac{\beta}{2m}(\frac{p_r^2}{1+4r^2}+\frac{p_\phi^2}{r^2})} e^{-\beta V_0\sqrt{1+4r^2}} =$$

$$= \frac{4\pi^2 m}{\beta}\int_0^\infty dr\, r\sqrt{1+4r^2}e^{-\beta V_0\sqrt{1+4r^2}} = \frac{4\pi^2 m}{\beta}e^{-\beta V_0}\frac{1}{\beta V_0}\big(1 + \frac{2}{\beta V_0} + \frac{2}{(\beta V_0)^2}\big)$$

3. ENSEMBLE GRAN-CANONICO

Esercizio 1

Calcolare la funzione di partizione gran-canonica per un sistema confinato in un volume V con hamiltoniana:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \big(\frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m} + \phi(\mathbf{q}_i)\big)$$

e calcolarne il numero medio di particelle.

Soluzione

$$Z^g \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu n}}{n!} (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}n} \int_V d\mathbf{q}_1 .... \int_V d\mathbf{q}_n e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} \phi(\mathbf{q}_i)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu n}}{n!} (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}n} \big(\int_V d\mathbf{q} e^{-\beta\phi(\mathbf{q})}\big)^n =$$

$$= \exp\{e^{\beta\mu} (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}} \int_V d\mathbf{q} e^{-\beta\phi(\mathbf{q})}\}$$

Il numero medio di particelle $< n >$ nell'ensemble gran-canonico é dato da

$$< n >= \frac{1}{Z^g} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{e^{\beta\mu n}}{n!} (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}n} \big(\int_V d\mathbf{q} e^{-\beta\phi(\mathbf{q})}\big)^n = e^{\beta\mu} (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}} \int_V d\mathbf{q} e^{-\beta\phi(\mathbf{q})} = \log Z^g \tag{3.1}$$

Esercizio 2
Per un gas perfetto nell'ensemble gran-canonico dimostrare che

$$U^g = \frac{3}{2} < n > kT$$

Soluzione

$$U^g = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta\mu n} U_c(n) Z^c_{\beta,V,n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta\mu n} Z^c_{\beta,V,n}} = \frac{3}{2} kT \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta\mu n} n Z^c_{\beta,V,n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta\mu n} Z^c_{\beta,V,n}} = \frac{3}{2} < n > kT$$

Esercizio 3

Dimostrare che per un gas perfetto nell'ensemble gran-canonico la probabilitá di avere N particelle é data dalla distribuzione Poissoniana:

$$P(N) = \frac{1}{N!} e^{-<n>} < n >^N$$

con $< n >$ numero medio delle particelle.

Soluzione
Abbiamo:

$$P(N) \equiv E_{\nu_{\beta,V,\mu}}(\chi_{(n=N)}) =$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu n}}{n!} \chi_{(n=N)} \int_{\Gamma_n} e^{-\beta H(\mathbf{p}^n,\mathbf{q}^n)} d\mathbf{p}^n d\mathbf{q}^n}{Z^g} =$$

$$= \frac{\frac{e^{\beta\mu N}}{N!} \frac{2\pi m}{\beta}^{\frac{3}{2}N}}{Z^g} \tag{3.2}$$

ed usando (3.1) abbiamo che che

$$< n >= e^{\beta\mu} (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}}$$

da cui otteniamo

$$P(N) = \frac{1}{N!} e^{-<n>} < n >^N$$