Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 11-4-2003

E. Scoppola

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente al piano verticale Π, è costituito da un'asta rigida sottile omogenea AB di lunghezza l e massa M e da un punto materiale P di massa m. L'asta ha gli estremi A e B vincolati a scorrere rispettivamente su un asse verticale y ed orizzontale x di Π. Il punto P è vincolato a scorrere sull'asse y. Il punto P è collegato al centro G dell'asta da una molla di costante $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata y di P e l'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ che AB forma con l'asse x.

1) Scrivere la lagrangiana.

2) Scrivere le equazioni del moto.

3) Determinare i punti di equilibrio e la loro stabilità al variare dei parametri.

4) Se il piano Π viene posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costante ω, determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π.

5) Se si aggiunge il vincolo per cui P coincide con A, determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico.

Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 11-4-2003
E. Scoppola

Esercizio 2

Si consideri la lagrangiana:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} e^q \dot{q}^2 \tag{1}$$

1) Scrivere l'hamiltoniana.

2) Scrivere le equazioni di Hamilton.

3) Ricavare la trasformazione canonica generata da $F(q, P) = Pe^{\frac{q}{2}}$ e la nuova hamiltoniana $K(Q, P)$.

4) Risolvere le equazioni del moto ricavate al punto 2) utilizzando la trasformazione canonica del punto 3).

Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 11-4-2003
E. Scoppola

Esercizio 3

Si consideri un gas gran-canonico di oscillatori armonici unidimensionali.

1) Ricavare la funzione di partizione gran-canonica Z^g.
2) Calcolare il numero medio di particelle.
3) Calcolare l'energia media U^g.