

**Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 14-4-2004**  
E. Scoppola

**Esercizio**

Si consideri un anello rigido sottile omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r\sqrt{1-a^2}$  con  $a \in (0, 1)$  ed  $r > 0$ , vincolato ad una superficie sferica di raggio  $r$  (tutti i punti dell'anello sono a contatto con la superficie sferica). Il vincolo è ideale. Una molla di costante di richiamo  $K > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega il centro dell'anello al punto  $N$  della superficie sferica dato dal punto superiore di intersezione tra la superficie e l'asse verticale passante per il centro  $O$  della sfera.

- 1) Scrivere la lagrangiana.
- 2) Ricavare le equazioni di Lagrange.
- 3) Determinare le quantità conservate.
- 4) Applicando il metodo di Routh, determinare la lagrangiana ridotta e discutere il problema unidimensionale associato analizzando il potenziale efficace.
- 5) Determinare l'hamiltoniana associata alla lagrangiana trovata al punto 1) e ricavare le equazioni di Hamilton.
- 6) Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi e risolverla col metodo di separazione delle variabili (in termini di integrali definiti).
- 7) Nel caso  $a = 1$  si consideri un gas di  $N$  particelle con hamiltoniana come nel punto 5). Calcolare la funzione di partizione canonica e l'energia interna del sistema.

**Per la prima parte rispondere alle domande 1), 2), 3), 4).**

**Per la seconda parte rispondere alle domande 1), 5), 6), 7).**