

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente al piano verticale Π , è costituito da una circonferenza materiale di raggio r e massa M e da un punto materiale P di massa m . La circonferenza è vincolata a rotolare senza strisciare sopra una retta orizzontale \hat{x} del piano Π ed il punto P è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza. Il punto P è collegato ad un punto fisso Q posto a distanza $2r$ dalla retta \hat{x} , nel semipiano superiore, mediante una molla ideale di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata x del centro C della circonferenza e l'angolo θ che CP forma con l'asse orizzontale.

- 1) Scrivere la lagrangiana.
- 2) Determinare i punti di equilibrio e la loro stabilità per $2mg = Kr$.
- 3) Determinare la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno alle posizioni di equilibrio stabile.
- 4) Se si aggiunge il vincolo $x = 0$, e si considera il dato iniziale $\theta(0) = 0$ determinare le velocità iniziali $\dot{\theta}(0)$ tali che viene raggiunta la posizione $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 2

Si consideri l'hamiltoniana

$$H(p, q) = p^2 q^3 \quad (1)$$

- 1) Scrivere le equazioni di Hamilton.
- 2) Ricavare la trasformazione canonica generata da $F(q, P) = -\frac{1}{qP}$.
- 3) Calcolare la nuova hamiltoniana $K(Q, P)$.
- 4) Risolvere le equazioni del moto ricavate al punto 1) utilizzando la trasformazione canonica del punto 2).

Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 11-4-2003
E. Scoppola

Esercizio 3

Si consideri un gas di N oscillatori armonici bidimensionali di massa m e pulsazione ω , posti in un recipiente circolare di raggio R a temperatura costante T .

- 1) Ricavare la funzione di partizione canonica Z^c .
- 2) Calcolare l'energia media U .
- 3) Calcolare la densità del gas in funzione di r .