

**I Esonero di Meccanica Analitica e Statistica: 27-2-2004**  
E. Scoppola, C.Tarantino

**Esercizio**

Un sistema meccanico, posto in un piano verticale  $\Pi$ , è costituito da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  e da un' asta, rigida, sottile, omogenea,  $AB$  di lunghezza  $l = 2R$  e massa  $m$ . Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare su un asse verticale  $y$  del piano  $\Pi$ , l'asta ha l'estremo  $A$  incernierato senza attrito nel centro  $C$  del disco e l'estremo  $B$  vincolato senza attrito ad un asse orizzontale  $x$ . Una molla ideale di costante di richiamo  $K > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega il centro  $C$  del disco all'asse  $x$  (in modo che la molla lavora sempre in posizione verticale). Si consideri come variabile lagrangiana l'angolo  $\theta$  che  $AB$  forma con l'asse  $x$  (vedi figura).

- 1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- 2) Trovare i punti di equilibrio, discutendone la stabilità, al variare dei parametri.
- 3) Studiare l'approssimazione delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile del sistema calcolandone il periodo.
- 4) Determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico.