**Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 12-7-2005**
E. Scoppola

**Esercizio 1**

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale $\Pi$ è formato da un punto materiale $P$ di massa $m$ e da un'asta sottile rigida omogenea $AB$ di lunghezza $l$ e massa $M$. Il punto $P$ è vincolato a muoversi lungo un asse verticale $y$ di $\Pi$ e l'asta ha gli estremi vincolati senza attrito ad una circonferenza fissa nel piano $\Pi$, di centro $O$ giacente sull'asse $y$ e raggio $R = \frac{l}{\sqrt{2}}$. Il punto è collegato agli estremi $A$ e $B$ dell'asta da due molle ideali identiche di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata $y$ di $P$ e l'angolo $\theta$ che $OC$ forma con l'asse orizzontale $x$, indicando con $C$ il centro dell'asta.

1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.

2) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile e determinarne le pulsazioni.

4) Se il piano $\Pi$ viene posto in rotazione attorno all'asse $y$ con velocità angolare costante $\omega$, determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con $\Pi$ e i nuovi punti di equilibrio.

**Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 12-7-2005**

E. Scoppola

**Esercizio 2**

Per $q > 0$ si consideri la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\frac{\dot{q}}{1+q})^2 - \log(1+q) \tag{1}$$

1) Scrivere l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.

2) Determinare la trasformazione canonica generata da $F(p,Q) = -p(e^Q - 1)$.

3) Usare la trasformazione trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto.

4) Risolvere le equazioni del moto trovate al punto 1) con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Si consideri un gas di $N$ particelle identiche indipendenti ciascuna con hamiltoniana come quella trovata al punto 1), a temperatura costante $T$.

5) Calcolare la funzione di partizione canonica.

6) Calcolare l'energia interna $U$.