Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 14-4-2005

E. Scoppola, P.Barone

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è formato da da un punto materiale P di massa m e da una circonferenza materiale di massa M e raggio R. Il centro C della circonferenza è vincolato a scorrere su una retta verticale y di Π ed il punto P è vincolato a scorrere sulla circonferenza materiale. I vincoli sono ideali. Il punto P è collegato tramite una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante di richiamo $K > 0$ ad un punto fisso O della retta y. Usando come variabili lagrangiane la coordinata y di C a partire da O, l'angolo θ che CP forma con l'asse orizzontale e l'angolo ϕ di rotazione della circonferenza attorno al suo centro:

1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.

2) Determinare le costanti del moto individuare una variabile ciclica e ricavare la lagrangiana ridotta.

3) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri.

4) Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile e determinarne le pulsazioni.

5) Se si fissa la corconferenza materiale con $y = R$ e $\phi = 0$, determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico.

Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 14-4-2005

E. Scoppola, P.Barone

Domanda

Definizione e proprietà delle matrici simplettiche.

Esercizio 2

Si consideri un gas perfetto canonico di N particelle a temperatura T in un volume sferico di raggio R.

1) Calcolare la funzione di partizione canonica Z^c.

2) Calcolare l'energia interna U^c.

3) Calcolare la densità del gas $\rho(r)$.

4) Calcolare la pressione P^c del gas.

5) Calcolare la densità di probabilità dell'energia di singola particella, cioè

$$\rho(E) := E^c(\mathbf{1}_{\{\frac{|\mathbf{p}_1|^2}{2m} \in (E, E+dE)\}})/dE \tag{1}$$

dove $E^c(.)$ indica l'aspettazione rispetto alla misura canonica. Verificare che $\rho(E)$ è una densità di probabilità.

Se si considera ora il caso di gas perfetto gran-canonico nelle stesse condizioni di temperatura e volume con potenziale chimico μ:

6) Calcolare la funzione di partizione gran-canonica Z^g.

7) Calcolare il numero medio $< n >$ di particelle.

8) Verificare che $U^g = \frac{3}{2} < n > KT$