I Esonero di Meccanica Analitica e Statistica: 28-2-2005

E. Scoppola, P.Barone

Esercizio

Si consideri il sistema meccanico, appartenente ad un piano verticale Π, formato da un disco rigido omogeneo di raggio r e massa m e da una sbarra sottile rigida omogenea AB di uguare massa m e lunghezza $l = 4r$. Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare all'interno di una guida circolare di raggio $R = 2r$ con centro fisso O. L' estremo A dell'asta è vincolato al centro C del disco e l'altro estremo, B, è connesso al punto O da una molla ideale di costante $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane gli angoli θ e ϕ che rispettivamente OC e CB formano con la verticale.

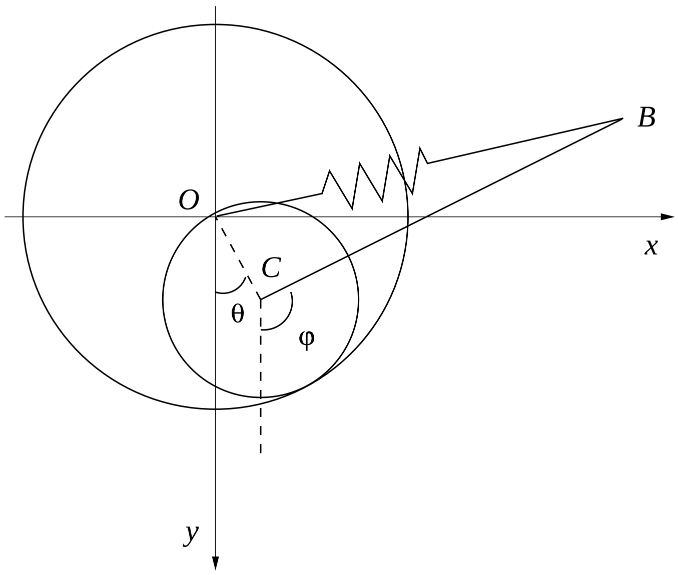
1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.

2) Determinare i punti di equilibrio.

3) Studiarne la stabilità quando $mg = 8Kr$.

4) Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile e scrivere l'equazione che determina le pulsazioni dei piccoli moti.

5) Se il disco viene fissato nella posizione $\theta = 0$ si determinino i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico.



Punto (1)

L'energia cinetica del sistema assume la forma (teorema di König):

$$T = \frac{1}{2}\, m\, v_C^2 \, + \frac{1}{2}\, I_C \omega_d^2 \, + \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 \, + \frac{1}{2}\, I_G \omega_a \tag{1}$$

dove v_C, v_G sono rispettivamente le velocitá del centro di massa del disco (coincidente con il centro C data l'omogeneitá del disco) e dell'asta, mentre ω_d, ω_a sono le velocitá angolari del disco e dell'asta rispetto a C e G. Utilizzando le variabili lagrangiane θ, ϕ definite nel testo si trova:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_C &= (r\, \sin\theta, r\, \cos\theta) && (2)\\
\mathbf{x}_G &= (r\, \sin\theta + \frac{l}{2}\, \sin\phi, r\, \cos\theta + \frac{l}{2}\, \cos\phi) && (3)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_C &= (r\,\dot\theta\cos\theta, -r\,\dot\theta\sin\theta) && (4)\\
\mathbf{x}_G &= (r\,\dot\theta\cos\theta + \frac{l}{2}\,\dot\phi\sin\phi, -r\,\dot\theta\sin\theta - \frac{l}{2}\,\dot\phi\sin\phi) && (5)
\end{aligned}$$

Dalle (4), (5) si ricava immediatamente $v_C^2 = r^2\dot\theta^2, v_G^2 = r^2(\dot\theta^2 + 4\dot\phi^2) + 4r^2\dot\theta\dot\phi\, \cos(\theta - \phi)$. La condizione di rotolamento puro implica che il punto di contatto (D) tra il disco e la guida circolare abbia velocitá nulla, per cui sussiste la relazione $\mathbf{v}_C = \omega_d \wedge \overline{DC}$ che permette di ricavare $\omega_d = -\dot{\theta}$ unica componente lungo l'asse z; analogamente la conoscenza delle velocitá dei centri di massa di disco e asta permette di determinare $\omega_a = -\dot{\phi}$. Dati i momenti d'inerzia $I_C = mr^2/2, I_G = ml^2/12 = 4mr^2/3$ si trova per l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}\, m\, r^2 \left[\frac{5}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{16}{3}\dot{\phi}^2 + 4\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)\right] \tag{6}$$

L'energia potenziale è data dalla somma del potenziale gravitazionale del disco e dell'asta e del potenziale elastico relativo alla sola asta; a meno di costanti irrilevanti:

$$V = -2rmg(\cos\theta + \cos\phi) + 4Kr^2\cos(\theta-\phi) \tag{7}$$

La lagrangiana del sistema è dunque data da $L = T - V$, ove T e V sono rispettivamente (6),(7). Le equazioni di Lagrange sono determinate da:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{\partial L}{\partial \phi} \end{aligned}$$

e nel caso specifico diventano:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mr^2\left[5\ddot{\theta} + 4\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) + 4\dot{\phi}^2\sin(\theta-\phi)\right] &= 4Kr^2\sin(\theta-\phi) - 2rmg\sin\theta \\ \frac{1}{2}mr^2\left[\frac{32}{3}\ddot{\phi} + 4\ddot{\theta}\cos(\theta-\phi) - 4\dot{\theta}^2\sin(\theta-\phi)\right] &= -4Kr^2\sin(\theta-\phi) - 2rmg\sin\theta \end{aligned}$$

Punto (2)

Per determinare i punti di equilibrio occorre studiare la derivata prima del potenziale (7) rispetto alle variabili lagrangiane:

$$V_\theta = 2rmg\sin\theta - 4Kr^2\sin(\theta-\phi) \tag{8}$$

$$V_\phi = 2rmg\sin\phi + 4Kr^2\sin(\theta-\phi) \tag{9}$$

Eguagliando a zero le due espressioni trovate si ricavano le condizioni che devono soddisfare i punti di equilibrio:

$$\sin\phi = -\sin\theta \tag{10}$$

$$4r\sin\theta\,[mg - 2Kr(\cos\theta + \cos\phi)] = 0 \tag{11}$$

I punti di equilibrio risultano essere

$$\begin{aligned} (\theta_1, \phi_1) &= (0, 0), \qquad & (\theta_2, \phi_2) &= (0, \pi) \\ (\theta_3, \phi_3) &= (\pi, 0), \qquad & (\theta_4, \phi_4) &= (\pi, \pi) \\ (\theta_5, \phi_5) &= \left(\arccos\left(\frac{mg}{4Kr}\right), -\theta_5\right), \qquad & (\theta_6, \phi_6) &= \left(-\arccos\left(\frac{mg}{4Kr}\right), -\theta_6\right) \end{aligned}$$

ove gli ultimi due punti di equilibrio esistono solo se sussiste la condizione $mg < 4Kr$.

Punto (3)

Quando $mg = 8Kr$ i punti $(\theta_5, \phi_5), (\theta_6, \phi_6)$ non esistono e lo studio della stabilitá è limitato ai primi quattro punti di equilibrio sopra definiti. Calcoliamo l'hessiano del potenziale:

$$\mathcal{H}(V)(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} 16Kr^2\cos\theta - 4Kr^2\cos(\theta - \phi) & 4Kr^2\cos(\theta - \phi) \\ 4Kr^2\cos(\theta - \phi) & 16Kr^2\cos\phi - 4Kr^2\cos(\theta - \phi) \end{pmatrix}$$

Si verifica immediatamente che l'hessiano calcolato in (θ_1, ϕ_1) ha determinante e traccia positivi, e dunque il punto è di equilibrio stabile. I punti (θ_2, ϕ_2) e (θ_3, ϕ_3) hanno invece un hessiano con determinante negativo, mentre per (θ_4, ϕ_4) il determinante di $\mathcal{H}(V)$ è positivo ma la traccia è negativa (gli autovalori sono cioè entrambi negativi); essi sono quindi punti di equilibrio instabile.

Punto (4)

L'energia cinetica di piccole oscillazioni è data semplicemente dall'energia cinetica (6) calcolata nel punto di equilibrio stabile $(\theta_1 = 0, \phi_1 = 0)$, quindi:

$$T_{PO} = \frac{1}{2}\,m\,r^2\left[\frac{5}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{16}{3}\dot{\phi}^2 + 4\dot{\theta}\dot{\phi}\right] \tag{12}$$

La matrice associata puó essere scritta come:

$$\mathcal{A}_T = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}mr^2 & 2mr^2 \\ \\ 2mr^2 & \frac{16}{3}mr^2 \end{pmatrix}$$

Del resto, l'energia potenziale di piccole oscillazioni è data dall'hessiano del potenziale calcolato nel punto di equilibrio stabile, che nel caso in esame diventa quindi:

$$\mathcal{C} = \mathcal{H}(V)(0,0) = \begin{pmatrix} 12Kr^2 & 4Kr^2 \\ \\ 4Kr^2 & 12Kr^2 \end{pmatrix}$$

La lagrangiana di piccole oscillazioni risulta quindi essere:

$$L_{PO} = \frac{1}{2}\, m\, r^2 \left[\frac{5}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{16}{3}\dot{\phi}^2 + 4\dot{\theta}\dot{\phi}\right] - 2Kr^2 \left[3\theta^2 + 3\phi^2 + 2\theta\phi\right] \tag{13}$$

Le pulsazioni ω^2 dei piccoli moti sono determinate da $\det(C - \omega^2 A_T) = 0$, vale a dire dall'equazione secolare:

$$r^4 \left[\left(12K - \frac{5}{2}m\omega^2\right)\left(12K - \frac{16}{3}m\omega^2\right) - (4K - 2m\omega^2)^2\right] = 0 \tag{14}$$

Punto (5)

Fissando il disco nella posizione $\theta = 0$ il sistema si riduce ad un problema con un solo grado di libertà in presenza di forze conservative. L'energia totale del sistema è una quantità conservata, data da:

$$E = \frac{8}{3}mr^2\dot{\phi}^2 + (4Kr^2 - 2rmg)\cos\phi \tag{15}$$

Il potenziale è dunque proporzionale ad un coseno; affinché il moto sia periodico l'energia totale del sistema deve soddisfare quindi la seguente condizione:

$$-2r(2Kr - mg) < E < 2r(2Kr - mg). \tag{16}$$

Infine risulterà periodico anche il moto di rotazione che fa seguito alla condizione iniziale:

$$E \; > \; 2r(2Kr - mg). \tag{17}$$