Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 12-7-2005

E. Scoppola, P.Barone

Soluzione esercizio 1

1) Abbiamo $OC = \sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2} = \frac{l}{2}$ e

$$A = (R\cos(\theta + \frac{\pi}{4}), R\sin(\theta + \frac{\pi}{4})), \qquad B = (R\cos(\theta - \frac{\pi}{4}), R\sin(\theta - \frac{\pi}{4})) \quad (1)$$

e dunque otteniamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M\frac{l^2}{3}\dot{\theta}^2 - mgy - Mg\frac{l}{2}\sin\theta - Ky^2 + Kly\sin\theta \quad (2)$$

con equazioni del moto:

$$m\ddot{y} = -mg - 2Ky + Kl\sin\theta \qquad M\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} = -Mg\frac{l}{2}\cos\theta + Kly\cos\theta \quad (3)$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = mg + 2Ky - Kl\sin\theta = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = (\frac{Mg}{2} - Ky)l\cos\theta = 0 \quad (5)$$

Per $\cos\theta = 0$ otteniamo i punti di equilibrio: $(y_1, \theta_1) = (\frac{Kl-mg}{2K}, \frac{\pi}{2})$ e $(y_2, \theta_2) = (-\frac{Kl+mg}{2K}, \frac{3\pi}{2})$. Se $\lambda := \frac{(m+M)g}{Kl} < 1$ abbiamo anche i punti $(y_{3,4}, \theta_{3,4}) = (\frac{Mg}{2K}, \arcsin\lambda)$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(y,\theta) = \begin{pmatrix} 2K & -Kl\cos\theta \\ -Kl\cos\theta & -l\sin\theta(\frac{Mg}{2} - Ky) \end{pmatrix} \quad (6)$$

nei diversi punti di equilibrio, ottenendo:

$$V''(y_1,\theta_1) = \begin{pmatrix} 2K & 0 \\ 0 & -l(\frac{(m+M)}{2}g - \frac{Kl}{2}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

dunque il punto (y_1, θ_1) è stabile se $\lambda < 1$, instabile altrimenti.

$$V''(y_2,\theta_2) = \begin{pmatrix} 2K & 0 \\ 0 & l(\frac{(m+M)}{2}g + \frac{Kl}{2}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

e dunque (y_2, θ_2) è stabile sempre. Se $\lambda < 1$ otteniamo:

$$V''(y_{3,4}, \theta_{3,4}) = \begin{pmatrix} 2K & -Kl\cos\theta_{3,4} \\ -Kl\cos\theta_{3,4} & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

e dunque i punti $(y_{3,4}, \theta_{3,4})$ sono instabili.

3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(y_2, \theta_2) =: \mathbf{q_0}$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (y, \theta)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\big(\mathbf{q} - \mathbf{q_0}), V''(y_2, \theta_2)(\mathbf{q} - \mathbf{q_0})\big) \tag{10}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{3} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(y_2, \theta_2) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} 2K - \omega^2 m & 0 \\ 0 & l(\frac{(m+M)}{2}g + \frac{Kl}{2}) - \omega^2 \frac{Ml^2}{3} \end{vmatrix} \tag{12}$$

da cui $\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ e $\omega = \sqrt{3\frac{(m+M)g+Kl}{2Ml}}$.

4) La nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π e':

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - V_{centr} \tag{13}$$

con $V_{centr} = -\frac{1}{2}M\omega^2\frac{l^2}{6}\cos^2\theta$. I nuovi punti di equilibrio si ottengono dalle equazioni:

$$mg + 2Ky - Kl\sin\theta = 0 \qquad [Mg\frac{l}{2} - Kyl + M\omega^2\frac{l^2}{6}\sin\theta]\cos\theta = 0 \tag{14}$$

Per $\cos\theta = 0$ otteniamo gli stessi punti (y_1, θ_1) e (y_2, θ_2) di prima. Se $\lambda' := \frac{(m+M)g}{Kl - \omega^2 M\frac{l}{3}} < 1$ abbiamo anche i due punti: $(\lambda'\frac{l}{2} - \frac{mg}{2K}, \arcsin\lambda')$.

Soluzione esercizio 2

1) Abbiamo $p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\dot{q}}{(1+q)^2}$ da cui $\dot{q} = p(1+q)^2$ e dunque

$$H = (1+q)^2\frac{p^2}{2} + \log(1+q) \tag{15}$$

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -p^2(1+q) - \frac{1}{1+q} \tag{16}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p(1+q)^2 \tag{17}$$

2) Applicando il procedimento di terza specie

$$q = -\frac{\partial F}{\partial p} = e^Q - 1 \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = pe^Q \tag{18}$$

da cui otteniamo la trasformazione:

$$P = p(1+q) \qquad Q = \log(1+q) \tag{19}$$

3) La nuova hamiltoniana è:

$$K(P,Q) = \frac{P^2}{2} + Q \tag{20}$$

con equazioni di Hamilton:

$$\dot{P} = -1 \qquad \dot{Q} = P \tag{21}$$

le cui soluzioni sono

$$P(t) = P(0) - t, \qquad Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{1}{2}t^2 \tag{22}$$

con dati iniziali $Q(0) = \log(1+q(0))$ e $P(0) = p(0)(1+q(0))$. Con la trasformazione inversa otteniamo:

$$q(t) = e^{Q(t)} - 1 = e^{Q(0)+P(0)t-\frac{t^2}{2}} - 1, \tag{23}$$

$$p(t) = P(t)e^{-Q(t)} = (P(0)-t)e^{-Q(0)-P(0)t+\frac{t^2}{2}} \tag{24}$$

4) Usiamo l'equazione di Hamilton-Jacobi indipendente dal tempo.

$$\frac{(1+q)^2}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \log(1+q) = E \tag{25}$$

da cui

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{\frac{2}{(1+q)^2}(E - \log(1+q))} \tag{26}$$

e dunque

$$\beta = \beta(0) + t = \frac{\partial W}{\partial E} = \pm\int_{q(0)}^{q} \frac{1}{(1+q')\sqrt{2(E-\log(1+q'))}}dq' \tag{27}$$

cioè $\frac{(\beta(0)+t)^2}{2} = C - \log(1+q)$, da cui $q(t) = e^{C'-\beta(0)t-\frac{t^2}{2}} - 1$ e $p(t) = \frac{\partial W}{\partial q} = \pm\frac{1}{(1+q(t))}\sqrt{2(E-\log(1+q(t)))}$.

5) Abbiamo $Z^c = \frac{1}{N!}(Z_1)^N$ con

$$Z_1 = \int_0^\infty dq \int dp \exp\{-\beta(\frac{p^2}{2}(1+q)^2 + \log(1+q))\} = \tag{28}$$

$$= \int_0^\infty dq (\frac{2\pi}{\beta})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+q} \exp\{-\beta \log(1+q))\} = (\frac{2\pi}{\beta})^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dy e^{-\beta y} = (\frac{2\pi}{\beta})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta} \tag{29}$$

6) L'energia interna e' data da

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z^c = \frac{3}{2} NKT \tag{30}$$