

Soluzione esercizio 1

- 1) Dal teorema di König l'energia cinetica della circonferenza materiale è data da:

$$T_{circ} = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2$$

mentre per il punto materiale abbiamo

$$x_P = R \cos \theta \quad y_P = y + R \sin \theta$$

da cui otteniamo

$$T_P = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{y} \cos \theta).$$

La forza gravitazionale ha potenziale

$$V_g = Mgy + mg(y + R \sin \theta)$$

e quella elastica

$$V_{el} = \frac{1}{2}K(y^2 + 2yR \sin \theta)$$

da cui abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(m+M)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m[R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{y} \cos \theta] - (M+m)gy + \\ & -mgR \sin \theta - \frac{1}{2}K(y^2 + 2Ry \sin \theta) \end{aligned}$$

con equazioni del moto:

$$(m+M)\ddot{y} + mR(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = -(m+M)g - Ky - KR \sin \theta \quad (1)$$

$$mR^2\ddot{\theta} + mR\ddot{y} \cos \theta = -mgR \cos \theta - KyR \cos \theta \quad (2)$$

$$MR^2\ddot{\phi} = 0 \quad (3)$$

- 2) $E = T + V$ è costante perché coincide con l'energia generalizzata che si conserva poiché $\mathcal{L}$ non dipende dal tempo, e si conserva anche il momento di ϕ , $p_\phi = MR^2\dot{\phi}$ poiché ϕ è una variabile ciclica. La lagrangiana ridotta è banale in questo caso:

$$\mathcal{L}_r = \frac{1}{2}(m+M)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m[R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{y}\cos\theta] - (M+m)gy + \\ -mgR\sin\theta - \frac{1}{2}K(y^2 + 2Ry\sin\theta)$$

- 3) Consideriamo il problema ridotto. I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = (m+M)g + Ky + KR\sin\theta = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = (mg + Ky)R\cos\theta = 0 \quad (5)$$

Per $\cos\theta = 0$ otteniamo i punti di equilibrio: $(y_1, \theta_1) = (-R - \frac{(m+M)g}{K}, \frac{\pi}{2})$ e $(y_2, \theta_2) = (R - \frac{(m+M)g}{K}, \frac{3\pi}{2})$. Per $y = -\frac{mg}{K}$, se $\lambda := \frac{Mg}{KR} < 1$ abbiamo anche i punti $(y_{3,4}, \theta_{3,4}) = (-\frac{mg}{K}, \arcsin -\lambda)$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(y, \theta) = \begin{pmatrix} K & KR\cos\theta \\ KR\cos\theta & -R\sin\theta(mg + Ky) \end{pmatrix} \quad (6)$$

nei diversi punti di equilibrio, ottenendo:

$$V''(y_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & R(Mg + KR) \end{pmatrix} \quad (7)$$

dunque il punto (y_1, θ_1) è stabile.

$$V''(y_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & R(-Mg + KR) \end{pmatrix} \quad (8)$$

e dunque (y_2, θ_2) è stabile se $\lambda < 1$ e instabile se $\lambda \geq 1$. Se $\lambda < 1$ otteniamo:

$$V''(y_{3,4}, \theta_{3,4}) = \begin{pmatrix} K & KR\cos\theta_{3,4} \\ KR\cos\theta_{3,4} & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

e dunque i punti $(y_{3,4}, \theta_{3,4})$ sono instabili, quando esistono ($\lambda < 1$).

- 4) Intorno al punto di equilibrio stabile $(y_1, \theta_1) =: \mathbf{q}_0$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (y, \theta)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0, V''(y_1, \theta_1)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)) \quad (10)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} m+M & 0 \\ 0 & mR^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(y_1, \theta_1) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} K - \omega^2(m+M) & 0 \\ 0 & R(Mg + KR) - \omega^2 mR^2 \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$\text{da cui } \omega = \sqrt{\frac{K}{(m+M)}} \text{ e } \omega = \sqrt{\frac{Mg+KR}{mR}}.$$

- 5) Per $y = R$ e $\phi = 0$ il problema è unidimensionale con lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\sin\theta - KR^2\sin\theta$ e dallo studio del potenziale $V(\theta) = R\sin\theta[mg + KR]$ otteniamo che il moto è sempre periodico eccetto che per i dati iniziali con energia $E = \pm R[mg + KR]$.

Soluzione esercizio 2

1)

$$Z^c = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}N} V^N = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}N} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right)^N \quad (13)$$

2)

$$U^c = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z^c = \frac{3}{2} NKT \quad (14)$$

cioè il teorema di equipartizione dell'energia.

3) La densità è data da:

$$\rho(r) = \frac{E(n(r)dr)}{4\pi r^2 dr}$$

Calcolando il valor medio $E(n(r)dr)$ del numero di particelle nella buccia sferica tra r e $r + dr$ otteniamo:

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2 dr} N \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3N}{4\pi R^3} \quad (15)$$

4)

$$P^c = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \log Z^c = \frac{1}{\beta} \frac{N}{V} \quad (16)$$

cioè l'equazione di stato del gas perfetto.

5)

$$\rho(E) = \frac{1}{dE} \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^{\frac{3}{2}} \int d\mathbf{p}_1 \mathbf{1}_{\left\{ \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{2m} \in (E, E+dE) \right\}} e^{-\beta \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{2m}} = \quad (17)$$

$$= \frac{1}{dE} \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dx 4\pi x^2 \mathbf{1}_{\{x \in (\sqrt{2mE}, \sqrt{2m(E+dE)})\}} e^{-\beta \frac{x^2}{2m}} \quad (18)$$

e passando dalla variabile x alla variabile $E' = \frac{x^2}{2m}$ otteniamo:

$$\rho(E) = \frac{1}{dE} \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dE' \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E'}} 4\pi m E' \mathbf{1}_{\{E' \in (E, E+dE)\}} e^{-\beta E'} = \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} 2\sqrt{E} e^{-\beta E} \quad (19)$$

Per verificare che ρ è una densità di probabilità basta controllare che $\int_0^\infty \rho(E) dE = 1$ e questo segue da:

$$\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} 2 \int_0^\infty \sqrt{E} e^{-\beta E} dE = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} 2 \int_0^\infty e^{-\beta y^2} dy = 1 \quad (20)$$

6)

$$Z^g = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} e^{\beta \mu n} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}n} V^n = \exp \left\{ e^{\beta \mu} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}} V \right\}$$

7) Il numero medio di particelle e' dato da:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{Z^g} \sum_{n=0}^\infty n \frac{1}{n!} e^{\beta \mu n} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}n} V^n = \log Z^g \quad (21)$$

8)

$$U^g = \frac{1}{Z^g} \sum_{n=0}^\infty U^c \frac{1}{n!} e^{\beta \mu n} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}n} V^n = \frac{3}{2} K T \langle n \rangle \quad (22)$$