Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 15-9-2005

E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1) Definiamo $r := \sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2}$

$$x_G = x + r\sin\theta \qquad y_G = R - r\cos\theta \tag{1}$$

e dunque, dal teorema di Konig, l'energia cinetica della sbarra è

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m\Big[(\dot{x} + r\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (r\dot{\theta}\sin\theta)^2\Big] + \frac{1}{2}m\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}m\Big[\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}r\cos\theta + \frac{l^2}{12}\dot{\theta}^2\Big] \tag{3}$$

Per il disco, dalla condizione di rotolamento $\dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{R}$ otteniamo

$$T_d = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 \tag{4}$$

L'energia potenziale è

$$V = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}K\Big[x^2 + 2xr\sin\theta - 2rR\cos\theta\Big] \tag{5}$$

e quindi otteniamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\Big[\dot{x}^2+r^2\dot{\theta}^2+2\dot{x}\dot{\theta}r\cos\theta+\frac{l^2}{12}\dot{\theta}^2\Big]+\frac{3}{4}M\dot{x}^2+mgr\cos\theta-\frac{1}{2}K\Big[x^2+2xr\sin\theta-2rR\cos\theta\Big] \tag{6}$$

Le equazioni del moto sono:

$$(m + \frac{3}{2}M)\ddot{x} + m\ddot{\theta}r\cos\theta - m\dot{\theta}^2 r\sin\theta = -Kx - Kr\sin\theta \tag{7}$$

$$m(r^2 + \frac{l^2}{12})\ddot{\theta} + m\ddot{x}r\cos\theta = -mgr\sin\theta - Kxr\cos\theta - KrR\sin\theta \tag{8}$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kx + Kr\sin\theta = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgr\sin\theta + K\Big[xr\cos\theta + rR\sin\theta\Big] = 0 \tag{10}$$

da cui

$$x = -r\sin\theta \qquad r\sin\theta\Big[mg - Kr\cos\theta + KR\Big] = 0 \tag{11}$$

La quantità entro la parentesi quadra non è mai nulla perchè $R > r$ e dunque otteniamo solo due punti di equilibrio: $(x_1, \theta_1) = (0, 0)$ e $(x_2, \theta_2) = (0, \pi)$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(x,\theta) = \begin{pmatrix} K & Kr\cos\theta \\ Kr\cos\theta & mgr\cos\theta + K[-xr\sin\theta + rR\cos\theta] \end{pmatrix} \tag{12}$$

nei due diversi punti di equilibrio, ottenendo:

$$V''(x_1,\theta_1) = \begin{pmatrix} K & Kr \\ Kr & mgr + KrR \end{pmatrix} \tag{13}$$

che ha traccia e determinante positivi, dunque il punto (x_1, θ_1) è stabile.

$$V''(x_2,\theta_2) = \begin{pmatrix} K & -Kr \\ -Kr & -mgr - KrR \end{pmatrix} \tag{14}$$

che ha determinante negativo e dunque (x_2, θ_2) è instabile.

3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(0, 0)$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (x, \theta)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q}, V''(x_1,\theta_1)\mathbf{q}) \tag{15}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M + m & mr \\ mr & mr^2 + \frac{ml^2}{12} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(x_1,\theta_1) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} K - \omega^2(\frac{3}{2}M + m) & Kr - \omega^2 mr \\ Kr - \omega^2 mr & mgr + KrR - \omega^2(mr^2 + \frac{ml^2}{12}) \end{vmatrix} \tag{17}$$

Soluzione esercizio 2

Vedi Celletti MH14 o qualunque testo di meccanica.

Soluzione esercizio 3

1) Nel caso $a = 1$ abbiamo $P(1) = P(2) = ... = P(n) = \frac{1}{n}$. Se $a < 1$, per $i = 1, ..., n$ abbiamo $P(i) = P(1)a^{i-1}$ dove $P(1)$ si ricava dalla normalizzazione $P(1) = \frac{1-a}{1-a^n}$.

2) L'entropia della distribuzione e':

$$S(P) = -\sum_{i=1}^{n} P(i) \log P(i) = -\log P(1) - P(1) \sum_{i=1}^{n} a^{i-1}(i-1) \log a$$

3) L'entropia è massima nel caso $a = 1$.