II Esonero di Meccanica Analitica e Statistica: 25-3-2005

E. Scoppola, P.Barone

Soluzione

1) Data la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}^2 q^2}{2} - \frac{q^4}{8} \tag{1}$$

sia $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q} q^2$ da cui $\dot{q} = \frac{p}{q^2}$ e dunque

$$H = \frac{p^2}{2q^2} + \frac{q^4}{8} \tag{2}$$

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{p^2}{q^3} - \frac{q^3}{2} \tag{3}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{q^2} \tag{4}$$

2) Applicando il procedimento di prima specie

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = qQ \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = -\frac{q^2}{2} \tag{5}$$

da cui otteniamo la trasformazione:

$$Q = \frac{p}{q} \qquad P = -\frac{q^2}{2} \tag{6}$$

3) La funzione F è funzione generatrice solo per $q \neq 0$, dunque le soluzioni che troveremo saranno solo locali. La nuova hamiltoniana è:

$$K(P, Q) = \frac{Q^2}{2} + \frac{P^2}{2} \tag{7}$$

cioè l'hamiltoniana di un oscillatore armonico, le cui soluzioni sono

$$Q(t) = A \sin(t + \phi), \quad P(t) = A \cos(t + \phi) \tag{8}$$

con dati iniziali $Q(0) = 0$ e $P(0) = -\frac{1}{2}$ da cui otteniamo $\phi = 0$ e $A = -\frac{1}{2}$. Con la trasformazione inversa otteniamo:

$$q(t) = \sqrt{\cos t}, \quad p(t) = -\frac{1}{2} \sin t \sqrt{\cos t} \tag{9}$$

4) Usiamo l'equazione di Hamilton-Jacobi indipendente dal tempo.

$$\frac{1}{2q^2}(\frac{\partial W}{\partial q})^2 + \frac{q^4}{8} = E \tag{10}$$

da cui

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{2q^2(E - \frac{q^4}{8})} \tag{11}$$

e dunque

$$\beta = \beta(0) + t = \frac{\partial W}{\partial E} = \int_{q(0)}^{q} \frac{(q')^2}{\sqrt{2(q')^2(E - \frac{(q')^4}{8})}} dq' = \arcsin(\frac{q^2}{2\sqrt{2E}}) - cost. \tag{12}$$

Dai dati iniziali otteniamo $E = \frac{1}{8}$ da cui $q(t) = \sqrt{\sin(t+\psi)}$ con $\psi = \frac{\pi}{2}$ e $p(t) = \frac{\partial W}{\partial q} = -\frac{1}{2}\sin t\sqrt{\cos t}$.

5) Poichè $H = \sum_{i=1}^{N}(\frac{p_i^2}{2q_i^2} + \frac{q_i^4}{8})$ abbiamo $Z^c = \frac{1}{N!}(Z_1)^N$ con

$$Z_1 = \int dq \int dp \exp\{-\beta(\frac{p^2}{2q^2} + \frac{q^4}{8})\} = (\frac{2\pi}{\beta})^{\frac{1}{2}} \int dq|q| \exp\{-\beta(\frac{q^4}{8})\} = \frac{2\pi}{\beta} \tag{13}$$

6) L'energia libera è data da

$$F = -\frac{1}{\beta}\log Z^c = \frac{1}{\beta}\log N! - \frac{N}{\beta}\log(\frac{2\pi}{\beta}) \tag{14}$$

e l'energia interna e' data da

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z^c = NKT. \tag{15}$$

7) La densità del gas è $\rho(q) = \frac{E(n(q)dq)}{dq}$ con

$$E(n(q)dq) = N\frac{\int dq_i \int dp_i \chi_{\{q_i\in(q,q+dq)\}} \exp\{-\beta(\frac{p_i^2}{2q_i^2} + \frac{q_i^4}{8})\}}{\int dq_i \int dp_i \exp\{-\beta(\frac{p_i^2}{2q_i^2} + \frac{q_i^4}{8})\}} = \big(\frac{\beta}{2\pi}\big)^{\frac{1}{2}} N|q| \exp\{-\beta(\frac{q^4}{8})\}dq \tag{16}$$