Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 31-3-2005

E. Scoppola, P.Barone

Soluzione esercizio 1

1) Sia y l'ordinata del punto P_1 e θ la coordinata angolare di P_2.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2] - mg(y + R\sin\theta) - \frac{1}{2}K(y^2 - 2Ry\sin\theta) \quad (1)$$

con equazioni del moto:

$$m\ddot{y} = -mg - Ky + KR\sin\theta \qquad mR^2\ddot{\theta} = -mgR\cos\theta + KRy\cos\theta \quad (2)$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = mg + Ky - KR\sin\theta = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = (mg - Ky)R\cos\theta = 0 \quad (4)$$

Per $\cos\theta = 0$ otteniamo i punti di equilibrio: $(y_1, \theta_1) = (R - \frac{mg}{K}, \frac{\pi}{2})$ e $(y_2, \theta_2) = (-R - \frac{mg}{K}, \frac{3\pi}{2})$. Per $y = \frac{mg}{K}$, se $\lambda := \frac{2mg}{KR} < 1$ abbiamo anche i punti $(y_{3,4}, \theta_{3,4}) = (\frac{mg}{K}, \arcsin\lambda)$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(y,\theta) = \begin{pmatrix} K & -KR\cos\theta \\ -KR\cos\theta & -R\sin\theta(mg - Ky) \end{pmatrix} \quad (5)$$

nei diversi punti di equilibrio, ottenendo:

$$V''(y_1,\theta_1) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -R(2mg - KR) \end{pmatrix} \quad (6)$$

dunque il punto (y_1, θ_1) è stabile se $\lambda < 1$, instabile altrimenti.

$$V''(y_2,\theta_2) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & R(2mg + KR) \end{pmatrix} \quad (7)$$

e dunque (y_2, θ_2) è stabile sempre. Se $\lambda < 1$ otteniamo:

$$V''(y_{3,4},\theta_{3,4}) = \begin{pmatrix} K & -KR\cos\theta_{3,4} \\ -KR\cos\theta_{3,4} & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

e dunque i punti $(y_{3,4}, \theta_{3,4})$ sono instabili, quando esistono ($\lambda < 1$).

3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(y_2, \theta_2) =: \mathbf{q_0}$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (y, \theta)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\big(\mathbf{q} - \mathbf{q_0}), V''(y_2, \theta_2)(\mathbf{q} - \mathbf{q_0})\big) \tag{9}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & mR^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(y_2, \theta_2) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} K - \omega^2 m & 0 \\ 0 & R(2mg + KR) - \omega^2 mR^2 \end{vmatrix} \tag{11}$$

da cui $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ e $\omega = \sqrt{\frac{2g}{R} + \frac{K}{m}}$.

4) La nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π e':

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - V_{centr} \tag{12}$$

con $V_{centr} = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \cos^2\theta$. I nuovi punti di equilibrio si ottengono dalle equazioni:

$$mg + Ky - KR\sin\theta = 0 \qquad [mg - Ky + m\omega^2 R\sin\theta]R\cos\theta = 0 \tag{13}$$

Per $\cos\theta = 0$ otteniamo gli stessi punti (y_1, θ_1) e (y_2, θ_2) di prima. Per $[mg - Ky + m\omega^2 R\sin\theta] = 0$ che con la prima equazione dà: $2mg + (m\omega^2 - K)R\sin\theta = 0$, se $\lambda' := \frac{2mg}{R(K - m\omega^2)}$ è tale che $|\lambda'| < 1$ abbiamo anche i due punti: $(\lambda' R - \frac{mg}{K}, \arcsin\lambda')$.

Soluzione esercizio 2

1) Data la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{q}\cos q)^2 - \sin q \tag{14}$$

sia $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q}\cos^2 q$ da cui $\dot{q} = \frac{p}{\cos^2 q}$ e dunque

$$H = \frac{p^2}{2\cos^2 q} + \sin q \tag{15}$$

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{p^2 \sin q}{\cos^3 q} - \cos q \tag{16}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\cos^2 q} \tag{17}$$

2) Applicando il procedimento di seconda specie

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = P\cos q \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \sin q \tag{18}$$

da cui otteniamo la trasformazione:

$$P = \frac{p}{\cos q} \qquad Q = \sin q \tag{19}$$

3) La nuova hamiltoniana è:

$$K(P,Q) = \frac{P^2}{2} + Q \tag{20}$$

con equazioni di Hamilton:

$$\dot{P} = -1 \qquad \dot{Q} = P \tag{21}$$

le cui soluzioni sono

$$P(t) = P(0) - t, \qquad Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{1}{2}t^2 \tag{22}$$

con dati iniziali $Q(0) = \sin q(0)$ e $P(0) = \frac{p(0)}{\cos q(0)}$. Con la trasformazione inversa otteniamo:

$$q(t) = \arcsin\big(Q(0)+P(0)t-\frac{1}{2}t^2\big), \quad p(t) = (P(0)-t)\sqrt{1-\big(Q(0)+P(0)t-\frac{1}{2}t^2\big)^2} \tag{23}$$

4) Usiamo l'equazione di Hamilton-Jacobi indipendente dal tempo.

$$\frac{1}{2\cos^2 q}\big(\frac{\partial W}{\partial q}\big)^2 + \sin q = E \tag{24}$$

da cui

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{2\cos^2 q(t)(E - \sin q(t))} \tag{25}$$

e dunque

$$\beta = \beta(0)+t = \frac{\partial W}{\partial E} = \pm\int_{q(0)}^{q} \frac{\cos^2 q'}{\sqrt{2\cos^2 q'(E-\sin q')}}dq' = \pm\sqrt{2(E-\sin q)} - cost. \tag{26}$$

cioè $2(E-\sin q) = (C+t)^2$ con C costante, da cui $q(t) = \arcsin(E - \frac{C^2}{2} - Ct - \frac{t^2}{2})$ e $p(t) = \frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{\cos^2 q(t)(C+t)^2} = \pm(C+t)\sqrt{1-(E-\frac{C^2}{2}-Ct-\frac{t^2}{2})^2}$.

5) Abbiamo $Z^c = \frac{1}{N!}(Z_1)^N$ con

$$Z_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dq \int dp \exp\{-\beta(\frac{p^2}{2\cos^2 q} + \sin q)\} = \tag{27}$$

$$= \big(\frac{2\pi}{\beta}\big)^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dq \cos q \exp\{-\beta \sin q\} = \big(\frac{2\pi}{\beta}\big)^{\frac{1}{2}} \frac{2\sinh\beta}{\beta} \tag{28}$$

6) L'energia interna e' data da

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z^c = \frac{3}{2}KT - \frac{\cosh\beta}{\sinh\beta}. \tag{29}$$

7) La densità del gas è $\rho(q) = \frac{E(n(q)dq)}{dq}$ con

$$E(n(q)dq) = N\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dq_i \int dp_i \chi_{\{q_i\in(q,q+dq)\}} \exp\{-\beta H\}}{\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2\sinh\beta}{\beta}} = \frac{N\beta}{2\sinh\beta}\cos q . e^{-\beta\sin q} dq \tag{30}$$

cioè

$$\rho(q) = \frac{N\beta}{2\sinh\beta}\cos q . e^{-\beta\sin q}. \tag{31}$$