

Scritto Meccanica Analitica e Statistica: 11-1-2007
E. Scoppola

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π é costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta rigida sottile omogenea AB di massa m e lunghezza $l > R$. Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare su una retta orizzontale x del piano Π e l'asta ha l'estremo A vincolato senza attrito al centro C del disco e l'estremo B vincolato a scorrere senza attrito su di una retta verticale y del piano Π . Il punto C è collegato all'asse y da una molla ideale di costante $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. La molla lavora sempre in posizione orizzontale. Si consideri come variabile lagrangiana l'angolo θ che AB forma con l'asse x .

- 1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- 2) Trovare i punti di equilibrio, discutendone la stabilità, al variare dei parametri.
- 3) Studiare l'approssimazione delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile del sistema e calcolarne il periodo.
- 4) Determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico nel caso $mg > 2Kl$.

Esercizio 2

Si consideri la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{q}^2}{2} - aq^2 \quad (1)$$

- 1) Scrivere l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
- 2) Determinare la trasformazione canonica generata da $F(q, Q) = \frac{q^2 Q}{2}$.
- 3) Usare la trasformazione trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 1$.

Si consideri un gas di N particelle identiche indipendenti ciascuna con hamiltoniana come quella trovata al punto 1), a temperatura costante T .

- 4) Calcolare la funzione di partizione canonica.
- 5) Calcolare l'energia interna U .
- 6) Calcolare la densità del gas $\rho(q)$.