

Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 27-3-2006
E. Scoppola, V.Alfi

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è formato da un'asta rigida sottile omogenea AB di lunghezza l e massa M e da un punto materiale P di massa m . Gli estremi A e B dell'asta sono vincolati a scorrere senza attrito su una guida circolare fissa nel piano Π di raggio $R = \sqrt{3}l$ e il punto P è vincolato a scorrere senza attrito su una retta orizzontale passante per il centro O della guida. Il baricentro G dell'asta ed il punto P sono connessi da una molla ideale di costante K e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata x di P a partire da O e l'angolo θ che OG forma con l'asse x .

- 1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
- 2) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri.
- 3) Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile e determinare l'equazione per le pulsazioni proprie.
- 4) Se si fissa il punto materiale nel centro della guida, determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico.

Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 27-3-2006
E. Scoppola, V. Alfi

Esercizio 2

Per $q > 0$ si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2 q^2}{4} - \frac{q^4}{4} \quad (1)$$

- 1) Determinare l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
- 2) Determinare la trasformazione canonica tale che $Q = Q(q) = \frac{q^2}{2}$.
- 3) Usare la trasformazione canonica trovata al punto 2) per integrare le equazioni del moto trovate al punto 1).
- 4) Usare il metodo di Hamilt-Jacobi per integrare le equazioni del moto trovate al punto 1).

Esercizio 3

Si consideri un gas di N oscillatori armonici unidimensionali indipendenti di massa m e pulsazione ω a temperatura T .

- 1) Calcolare la funzione di partizione canonica Z^c .
- 2) Calcolare l'energia interna U .
- 3) Calcolare l'elongazione quadratica media $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(x_i^2)$.
- 4) Calcolare la densità del gas in funzione di x (*facoltativo*).

Si ricordi che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$