Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 11-1-2005

E. Scoppola

Soluzione Esercizio 1

1) Dal teorema di Koenig otteniamo per l'energia cinetica dell'asta

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m(\frac{l}{2})^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

e per quella del disco

$$T_D = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}(\frac{l\dot{\theta}}{R}\sin\theta)^2 = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\frac{3}{2}\sin^2\theta \tag{2}$$

dove abbiamo usato la relazione di rotolamento $\dot{\phi} = -\frac{l}{R}\dot{\theta}\sin\theta$.

Il potenziale gravitazionale è $V_g = mg\frac{l}{2}\sin\theta$ e quello elastico è $V_{el} = \frac{1}{2}Kl^2\cos^2\theta$. La lagrangiana dunque è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\frac{3}{2}\sin^2\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}Kl^2\cos^2\theta \tag{3}$$

L' equazione del moto è:

$$m\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{3}{2}Ml^2\ddot{\theta}\sin^2\theta + 3Ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta =$$

$$= \frac{3}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - mg\frac{l}{2}\cos\theta + Kl^2\sin\theta\cos\theta \tag{4}$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$V'(\theta) = l\cos\theta[\frac{mg}{2} - Kl\sin\theta] = 0 \tag{5}$$

cioè i punti $\theta_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\theta_2 = \frac{3}{2}\pi$, e se $\lambda := \frac{mg}{2Kl} < 1$ anche $\theta_{3,4} = \arcsin\lambda$.

Per studiare la stabilità valuto la derivata seconda nei diversi punti.

$$V"\theta) = -l\sin\theta[\frac{mg}{2} - Kl\sin\theta] - Kl^2\cos^2\theta \tag{6}$$

da cui : $V"(\theta_1) = -[\frac{mg}{2} - Kl]$ e cioè il punto θ_1 è stabile per $\lambda < 1$ e instabile per $\lambda > 1$; $V"(\theta_2) = [\frac{mg}{2} + Kl] > 0$ e cioè il punto θ_2 è stabile sempre; $V"(\theta_{3,4}) = -Kl^2\cos^2\theta < 0$ e dunque $\theta_{3,4}$ sono instabili quando esistono; per continuità per $\lambda = 1$ il punto θ_1 è instabile.

3) Intorno al punto di equilibrio stabile θ_2 la lagrangiana delle piccole oscillazioni è:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\frac{3}{2} - \frac{1}{2}[\frac{mg}{2} + Kl](\theta - \theta_2)^2 \tag{7}$$

ed il periodo è dunque

$$T_{po} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m}{3} + M\frac{3}{2}}{[\frac{mg}{2l^2} + K]}}$$

.

4) L'energia potenziale nel caso $mg > 2Kl$ ha solo due punti critici: θ_1 che è un massimo e θ_2 che è un minimo che corrispondono ai valori del potenziale $\pm mg\frac{l}{2}$. I moti sono dunque periodici se si escludono i dati iniziali con energia totale uguale a $\pm mg\frac{l}{2}$

Soluzione Esercizio 2

1) Data la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{q}^2q^2}{2} - aq^2 \tag{8}$$

sia $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}q^2$ da cui $\dot{q} = \frac{p}{mq^2}$ e dunque

$$H = \frac{p^2}{2mq^2} + aq^2 \tag{9}$$

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{p^2}{mq^3} - 2aq \tag{10}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{mq^2} \tag{11}$$

2) Applicando il procedimento di prima specie

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = qQ \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = -\frac{q^2}{2} \tag{12}$$

da cui otteniamo la trasformazione:

$$Q = \frac{p}{q} \qquad P = -\frac{q^2}{2} \tag{13}$$

3) La funzione F è funzione generatrice solo per $q \neq 0$, dunque le soluzioni che troveremo saranno solo locali. La nuova hamiltoniana è:

$$K(P,Q) = \frac{Q^2}{2m} - 2aP \tag{14}$$

con equazioni di Hamilton:

$$\dot{P} = -\frac{Q}{m}, \qquad \dot{Q} = -2a$$

da cui otteniamo per i dati iniziali scelti $P(0) = -\frac{1}{2}$, $Q(0) = 1$ le soluzioni

$$Q(t) = 1 - 2at, \qquad P(t) = -\frac{1}{2} + \frac{at^2}{m} - \frac{t}{m}$$

Con la trasformazione inversa otteniamo:

$$q(t) = \sqrt{1 + \frac{2t}{m} - \frac{2at^2}{m}}, \quad p(t) = (1 - 2at)\sqrt{1 + \frac{2t}{m} - \frac{2at^2}{m}} \tag{15}$$

4) Poichè $H = \sum_{i=1}^{N}(\frac{p_i^2}{2mq_i^2} + aq_i^2)$ abbiamo $Z^c = \frac{1}{N!}(Z_1)^N$ con

$$Z_1 = \int dq \int dp \exp\{-\beta(\frac{p^2}{2mq^2} + aq^2)\} = (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{1}{2}} \int dq|q| \exp\{-\beta(aq^2)\} = (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2a\beta} \tag{16}$$

6) L'energia interna e' data da

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z^c = N\frac{3}{2}KT. \tag{17}$$

7) La densità del gas è $\rho(q) = \frac{E(n(q)dq)}{dq}$ con

$$E(n(q)dq) = N\frac{\int dq_i \int dp_i \chi_{\{q_i \in (q,q+dq)\}} \exp\{-\beta(\frac{p_i^2}{2mq_i^2} + aq_i^2)\}}{\int dq_i \int dp_i \exp\{-\beta(\frac{p_i^2}{2mq_i^2} + aq_i^2)\}} = N2\beta a|q| \exp\{-\beta(aq^2)\}dq \tag{18}$$