Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 13-4-2006

E. Scoppola, V.Alfi

Soluzione esercizio 1

1) Le coordinate dei punti sono:

$$x = R\cos\theta, \qquad y = 0, \qquad z = R\sin\theta \tag{1}$$

$$x' = R\cos\theta', \qquad y' = R, \qquad z' = R\sin\theta' \tag{2}$$

L'energia cinetica totale è $T = \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\theta'^2)$. L'energia potenziale gravitazionale è: $V_g = mgR(\sin\theta + \sin\theta')$ e quella elastica a meno di costanti $V_{el} = -KR^2\cos(\theta - \theta')$ La lagrangiana dunque è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\theta'^2) - mgR(\sin\theta + \sin\theta') + KR^2\cos(\theta - \theta') \tag{3}$$

Le equazioni del moto sono:

$$mR^2\ddot\theta = -KR^2\sin(\theta - \theta') - mgR\cos\theta \tag{4}$$

$$mR^2\ddot\theta' = KR^2\sin(\theta - \theta') - mgR\cos\theta' \tag{5}$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = KR^2\sin(\theta - \theta') + mgR\cos\theta = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta'} = -KR^2\sin(\theta - \theta') + mgR\cos\theta' = 0 \tag{7}$$

Sommando le equazioni otteniamo $\cos\theta = -\cos\theta'$ e dunque per $\theta' = \pi + \theta$ abbiamo come soluzioni $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_1' = \frac{3}{2}\pi$ e $\theta_2 = \frac{3}{2}\pi$, $\theta_2' = \frac{\pi}{2}$ e per $\theta' = \pi - \theta$ abbiamo soluzioni $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_3' = \frac{\pi}{2}$, e $\theta_4 = \frac{3}{2}\pi$, $\theta_4' = \frac{3}{2}\pi$ e se $\lambda := \frac{mg}{2KR} < 1$ abbiamo ancora due altre soluzioni $\theta_{5,6}$ e $\theta_{5,6}' = \pi - \theta_{5,6}$ con $\theta_{5,6} = \arcsin\lambda$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta,\theta') = \begin{pmatrix} KR^2\cos(\theta-\theta') - mgR\sin\theta & -KR^2\cos(\theta-\theta') \\ -KR^2\cos(\theta-\theta') & KR^2\cos(\theta-\theta') - mgR\sin\theta' \end{pmatrix} \tag{8}$$

nei diversi punti critici.

$$V''(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)=\left(\begin{array}{cc} -KR^2-mgR & KR^2 \\ KR^2 & -KR^2+mgR \end{array}\right) \tag{9}$$

ha determinante negativo dunque il punto è instabile.

$$V''(\frac{3}{2}\pi,\frac{\pi}{2})=\left(\begin{array}{cc} -KR^2+mgR & KR^2 \\ KR^2 & -KR^2-mgR \end{array}\right) \tag{10}$$

ha determinante negativo dunque il punto è instabile.

$$V''(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=\left(\begin{array}{cc} KR^2-mgR & -KR^2 \\ -KR^2 & KR^2-mgR \end{array}\right) \tag{11}$$

ha determinante positivo se $\lambda>1$ e traccia positiva se $KR>mg$ e dunque il punto è instabile sempre.

$$V''(\frac{3}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi)=\left(\begin{array}{cc} KR^2+mgR & -KR^2 \\ -KR^2 & KR^2+mgR \end{array}\right) \tag{12}$$

che ha determinante e traccia positivi e dunque il punto è stabile.

Se $\lambda<1$ per i punti $(\theta_{5,6},\theta'_{5,6})$ abbiamo

$$V''(\theta_{5,6},\theta'_{5,6})=\left(\begin{array}{cc} -KR^2(1-2\lambda^2)-mgR\lambda & KR^2(1-2\lambda^2) \\ KR^2(1-2\lambda^2) & -KR^2(1-2\lambda^2)-mgR\lambda \end{array}\right) \tag{13}$$

che ha traccia negativa e dunque i punti $(\theta_{3,4},x_{3,4})$ sono instabili.

3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(\frac{3}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi)$ la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q}:=(\theta,\theta')$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po}=\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}},A\dot{\mathbf{q}})-\frac{1}{2}((\mathbf{q}-\mathbf{q}_0),V''\frac{3}{2}\pi\frac{3}{2}\pi()(\mathbf{q}-\mathbf{q}_0)) \tag{14}$$

con

$$A=\left(\begin{array}{cc} mR^2 & 0 \\ 0 & mR^2 \end{array}\right) \tag{15}$$

e $\mathbf{q}_0:=(\frac{3}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi)$. Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det\Big[V''(\frac{3}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi)-\omega^2A\Big]=0=\left|\begin{array}{cc} KR^2+mgR-\omega^2mR^2 & -KR^2 \\ -KR^2 & KR^2+mgR-\omega^2mR^2 \end{array}\right| \tag{16}$$

Soluzione esercizio 2

1) $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q} m \sin^2(q)$ da cui $\dot{q} = \frac{p}{m \sin^2(q)}$ e dunque

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m\sin^2(q)} + \cos q \tag{17}$$

con equazioni del moto:

$$\dot{p} = \frac{p^2 \cos q}{m \sin^3(q)} + \sin q, \qquad \dot{q} = \frac{p}{m \sin^2(q)} \tag{18}$$

2) Lo Jacobiano della trasformazione $Q(q) = \cos q$ è $-\sin q$ da cui la trasformazione si completa in modo canonico con $P = -\frac{p}{\sin q}$.

3) Nelle nuove variabili l'hamiltoniana diventa $K(P,Q) = \frac{1}{2m}P^2 + Q$ e le equazioni di Hamilton

$$\dot{P} = -1, \qquad \dot{Q} = \frac{P}{m} \tag{19}$$

con soluzioni $P(t) = P(0) - t$ e $Q(t) = Q(0) + \frac{1}{m}(P(0)t - \frac{t^2}{2})$. Le soluzioni locali per le variabili minuscole diventano

$$q(t) = \arccos Q(t) = \arccos(Q(0) + \frac{1}{m}(P(0)t - \frac{t^2}{2})) \tag{20}$$

$$p(t) = -\sin q(t)(P(0) - t) \tag{21}$$

4) L'equazione di Hamilton-Jacobi è: $(\frac{\partial W}{\partial q})^2 \frac{1}{2m\sin^2(q)} + \cos q = E$ da cui otteniamo

$$\beta = \beta(0) + t = \frac{\partial W}{\partial E} = \tag{22}$$

$$= \int_{q_0}^{q} m \sin^2(q') \frac{1}{\sqrt{2m\sin^2(q')(E - \cos(q'))}} dq' = \sqrt{2m}\sqrt{E - \cos q} + cost \tag{23}$$

da cui

$$q(t) = \arccos(E - \frac{(C+t)^2}{2m}) \tag{24}$$

$$p(t) = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m(E - \cos q)} \sin(q(t)) \tag{25}$$

1) Poiche' le particelle non interagiscono tra loro abbiamo $Z^c = \frac{1}{N!} Z_1^N$ con

$$Z_1 = \int_0^\pi dq \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\beta \frac{p^2}{2m\sin^2(q)}} e^{-\beta \cos q} = \tag{26}$$

$$= \left[\frac{2m\pi}{\beta}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{\beta}\right] = (2m\pi)^{\frac{1}{2}} \beta^{-\frac{3}{2}} 2 \sinh \beta \tag{27}$$

da cui

$$Z^c = \frac{1}{N!}\left[(2m\pi)^{\frac{1}{2}} \beta^{-\frac{3}{2}} 2 \sinh \beta\right]^N \tag{28}$$

2)

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z^c = N(\frac{3}{2}KT - \frac{\cosh\beta}{\sinh\beta}) \tag{29}$$