Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 19-9-2006

E. Scoppola

Soluzione

1) L'energia cinetica si può calcolare utilizzando il teorema di Koenig. Osserviamo che, avendo orientato l'asse y verso il basso abbiamo:

$$x_C = R\sin\theta \qquad y_c = y + R\cos\theta$$

e dunque

$$T = \frac{1}{2}m\Big(R^2\dot\theta^2 + \dot y^2 - 2\dot y\dot\theta R\sin\theta\Big) + \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2$$

L'energia potenziale è la somma del potenziale gravitazionale e di quello elastico

$$V = -mg(y + R\cos\theta) + \frac{1}{2}K(y^2 + 2Ry\cos\theta)$$

La lagrangiana è quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\Big(2R^2\dot\theta^2 + \dot y^2 - 2\dot y\dot\theta R\sin\theta\Big) + mg(y + R\cos\theta) - \frac{1}{2}K(y^2 + 2Ry\cos\theta) \tag{1}$$

Le equazioni del moto sono:

$$2mR^2\ddot\theta - m\ddot y R\sin\theta = -mgR\sin\theta + KRy\sin\theta \tag{2}$$

$$m\ddot y - m\ddot\theta R\sin\theta - m\dot\theta^2 R\cos\theta = mg - Ky - KR\cos\theta \tag{3}$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = R\sin\theta(mg - Ky) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Ky + KR\cos\theta - mg = 0 \tag{5}$$

da cui i punti critici:

$$(\theta_1, y_1) = (0, \frac{mg}{K} - R) \qquad (\theta_2, y_2) = (\pi, \frac{mg}{K} + R) \tag{6}$$

$$(\theta_3, y_3) = (\frac{\pi}{2}, \frac{mg}{K}) \qquad (\theta_4, y_4) = (\frac{3}{2}\pi, \frac{mg}{K}) \tag{7}$$

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta, y) = \begin{pmatrix} R\cos\theta(mg - Ky) & -KR\sin\theta \\ -KR\sin\theta & K \end{pmatrix} \tag{8}$$

nei diversi punti critici.

$$V''(\theta_{1,2}, y_{1,2}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{9}$$

e dunque i punti di equilibrio $(\theta_{1,2}, y_{1,2})$ sono stabili;

$$V''(\theta_{3,4}, y_{3,4}) = \begin{pmatrix} 0 & \mp KR \\ \mp KR & K \end{pmatrix} \tag{10}$$

che ha determinante negativo e dunque i punti di equilibrio $(\theta_{3,4}, y_{3,4})$ sono instabili.

3) Per calcolare la lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione bisogna sottrarre alla lagrangiana trovata al punto 1) il potenziale centrifugo che si ottiene calcolando

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2\rho R\int_0^{2\pi}(R\sin\theta + R\cos\phi)^2 d\phi = -\frac{1}{2}\omega^2 mR^2\sin^2\theta + cost$$

4) Nel caso $R = 0$ e $\omega = 0$ il problema è unidimensionale con lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}Ky^2 + mgy$$

e dunque l'hamiltoniana è:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Ky^2 - mgy$$

e le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{p} = -Ky + mg \qquad \dot{y} = \frac{p}{m}$$

5) Si puo' risolvere in diversi modi. Le equazioni di Hamilton possono essere riscritte nella forma

$$\ddot{y} = -\frac{K}{m}y + g$$

che puo' essere risolta aggiungendo alla soluzione dell'omogenea (oscillatore armonico) la soluzione particolare $y_p = \frac{mg}{K}$. Da cui

$$y(t) = \frac{mg}{K} + A\sin(\omega t + \phi)$$

con $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ e A e ϕ costanti che dipendono dai dati iniziali.

Analogamente si può osservare che aggiungendo una costante ad H non cambiano le equazioni del moto da cui definendo $z = y - \frac{mg}{K}$ possiamo scrivere l'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kz^2$$

cioè quella di un oscillatore armonico e dunque $z(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ e quindi

$$y(t) = \frac{mg}{K} + A\sin(\omega t + \phi).$$

Il problema si può anche risolvere con il metodo di Hamilton-Jacobi.

6) Per un gas canonico di particelle indipendenti abbiamo $Z^c = \frac{1}{N!}(Z_1)^N$. Nel nostro caso abbiamo

$$Z_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}dp \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(\frac{K}{2}y^2 - mgy)}dy =$$

$$= (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{1}{2}} e^{\beta\frac{m^2g^2}{2K}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(\frac{K}{2}y^2 - mgy + \frac{m^2g^2}{2K})}dy$$

e passando alla variabile $z = \sqrt{\frac{K}{2}}y - \frac{mg}{\sqrt{2K}}$ otteniamo

$$Z_1 = (\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{1}{2}} e^{\beta\frac{m^2g^2}{2K}} \sqrt{\frac{2}{K}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta z^2}dz = \frac{2\pi}{\beta}\sqrt{\frac{2m}{K}} e^{\beta\frac{m^2g^2}{2K}}$$

Per l'energia interna abbiamo:

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z^c = -N\frac{m^2g^2}{2K} + \frac{N}{\beta}$$